Teoría de la Medida. Curso 2003-2004.

Capítulo V. Teorema de Radon-Nikodym. Descomposición de Lebesgue. Teorema Fundamental del cálculo.

Sea μ es una medida con signo cuya descomposición de Jordan es $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Una función medible f es integrable con respecto a μ si lo es con respecto a $|\mu|$ y se escribe por definición:

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^-.$$

Se dirá que f es integrable en E cuando $f\chi_E$ sea integrable y se pondrá en ese caso:

$$\int_E f \, d\mu = \int f \, \chi_E \, d\mu.$$

Por otra parte, se dice que una medida con signo ν es abosultamente continua con respecto de otra medida con signo μ si se tiene que $\nu(E) = 0$ cada vez que $|\mu|(E) = 0$, lo cual representaremos por $\nu \ll \mu$.

1. Demostrar que f es integrable con respecto a μ si y sólo si es integrable separadamente con respecto a las medidas μ^+ y μ^-. Probar:

$$|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d|\mu|.$$

2. Demostrar que el teorema de Radon-Nikodym es válido si μ es una medida con signo σ-finita.

3. Sean ν y μ medidas con signo σ-finitas de forma que ν es absolutamente continua con respecto a μ, es decir $\nu \ll \mu$. Pruébese entonces que el conjunto:

$$\{x : \frac{d\mu}{d\nu} = 0\}$$

tiene medida ν cero.

4. Sean ν y μ dos medidas con signo σ-finitas tales que $\nu \ll \mu$. Demuéstrese que para cada función φ que sea ν-integrable se tiene que la función $\varphi(\partial\nu/\partial\mu)$ es μ-integrable y se satisface la identidad:

$$\int \varphi \, d\nu = \int \varphi \frac{\partial \nu}{\partial \mu} \, d\mu.$$

[Indicación]. Considérese primeramente el caso en que ν y μ son medidas y φ es una función simple.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

5. Sean λ, μ medidas σ-finitas mientras ν es una medida σ-finita con signo. Supóngase que $\nu \ll \mu$, $\mu \ll \lambda$. Pruébese entonces que:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \lambda} = \frac{\partial \nu}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \lambda},$$

en casi todo punto.

6. Sean μ una medida, ν_1, ν_2 medidas con signo, todas ellas σ-finitas satisfaciendo $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \ll \mu$. Demuéstrese que $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ y:

$$\frac{\partial(\nu_1 + \nu_2)}{\partial \mu} = \frac{\partial \nu_1}{\partial \mu} + \frac{\partial \nu_2}{\partial \mu}.$$

7. Sean μ, ν medidas σ-finitas y supóngase que $\mu - \nu$ es una medida. Si $\nu \ll \mu - \nu$ demuéstrese entonces que el conjunto de puntos donde $\dfrac{\partial \nu}{\partial \mu} = 1$ tiene medida μ cero.

Descomposición de Lebesgue.

8. Demuéstrese que para cada medida con signo μ se satisfacen: $\mu^+ \perp \mu^-$, $\mu^+ \ll |\mu|$ y $\mu^- \ll |\mu|$.

9. Supóngase que ν_1 y ν_2 son singulares con respecto a μ. Demuéstrese que $\nu_1 + \nu_2$ también es singular con respecto a μ.

10. Sea ν una medida con signo tal que $\nu \ll \mu$ junto con $\nu \perp \mu$. Pruébese que ν es la medida nula.

11. Sea $\{x_m\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$, $\{p_m\}$ una sucesión de números positivos. Denótese por ν la medida σ-finita:

$$\nu(E) = \sum_{x_m \in E} p_m.$$

Hállese la descomposición de Lebesgue de ν con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Teorema fundamental del cálculo.

12. A cada función monótona creciente y continua por la derecha en el intervalo (a, b) corresponde la medida de Lebesgue descrita en capítulos anteriores que se denota por μ_f. Se sabe que cada función de variación acotada f y continua por la derecha se puede descomponer en la diferencia de dos funciones crecientes y continuas por la derecha $f = f_1 - f_2$. Defínase $\mu_f = \mu_{f_1} - \mu_{f_2}$. Demuéstrese que la función f es absolutamente continua si y sólo si la medida con signo μ_f es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue μ_x.

13. Sea f una función absolutamente continua en el intervalo (a,b). Demuéstrese que:

$$\frac{d\mu_f}{d\mu_x} = f'(x)$$

para casi todo punto y que para cada función μ_f-integrable φ se cumple:

$$\int_{(a,b)} \varphi \; d\mu_f = \int_a^b \varphi f' \; dx.$$

14. Sean f integrable Lebesgue en (a,b) y g absolutamente continua en (a,b). Si F denota cualquier integral indefinida de f demuéstrese la siguiente regla de integración por partes:

$$\int_a^b fg \; dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b Fg' \; dx.$$

15. Sean f, g absolutamente continuas en (a,b). Entonces:

$$\int_{(a,b)} f \; dg - \int_{(a,b)} g \; df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

16. Se dice que una función f es singular si $f'(x) = 0$ para casi todo punto. Demuéstrese que cada función g de variación acotada en (a,b) se puede escribir como la suma $g = g_1 + g_2$ donde g_1 es absolutamente continua y g_2 es singular. Demuéstrese asimismo que tal descomposición es única módulo una constante aditiva.

17. Sean g, g_1, g_2 las funciones del problema anterior y considérese la descomposición $\mu_g = \mu_{g_1} + \mu_{g_2}$. Si μ_x designa la medida de Lebesgue pruébese que μ_{g_1} es absolutamente continua con respecto a μ_x mientras μ_{g_2} es singular con respecto a μ_x.

18. Si $f(x)$ es continua en (a,b) y $f'(x)$ existe en cada punto $x \in (a,b)$ y es acotada entonces:

$$\int_a^x f'(t) \; dt = f(x) - f(a),$$

para cada $a < x < b$.

19. Para $E \subset \mathbb{R}$ medible se define $(h > 0)$:

$$E(x_0, h) = E \cap [x_0 - h, x_0 + h].$$

Sea μ la medida de Lebesgue. Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto con densidad θ respecto de E si:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\mu[E(x_0,h)]}{2h} = \theta.$$

Demuéstrese que casi todo punto de E tiene densidad 1 mientras que casi todo punto de $\mathbb{R} \setminus E$ tiene densidad 0.
[Indicación]. Admítase que $E \subset [\alpha, \beta]$ mientras $g(x) = \int_{\alpha-1}^{x} \chi_E(t)\, dt$. Entonces $\chi_E(x) = g'(x)$ para casi todo punto. Nótese que por otra parte se cumple que:

$$g(x+h) - g(x-h) = \mu[E(x,h)].$$