Teoría de la Medida. Curso 2003-2004.

Capítulo IV. Integral de Riemann.

Para el siguiente tema es muy recomendable disponer del capítulo de integración de Riemann y Riemann-Stieltjes del libro de T. M. Apostol, Análisis Matemático, Editorial Reverté. En lo que sigue denotaremos la integral de Riemann como $\int_a^b f(x) dx$, designando $\int_{[a,b]} f(x) dx$ la integral de Lebesgue.

1. Sea f una función real acotada en $[a, b]$. Para una partición $\pi_m = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b\}$ se define la suma superior de Darboux

$$S_{\pi_m} = \sum_i M_i \Delta x_i,$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$. Se define asimismo $|\pi_m| = \max \Delta x_i$. Demuéstrese que existe un $\bar{s}$ tal que cualquiera que sean las sucesiones de particiones $\{\pi_m\}$ con $|\pi_m| \rightarrow 0+$ se tiene que:

$$\lim S_{\pi_m} = \bar{s}.$$

2. Demuéstrese que toda función monótona y acotada f en un intervalo $[a, b]$ es integrable Riemann.

3. Para una función acotada f en un intervalo no acotado $[a, \infty)$ la integral de Riemann impropia se define como:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

supuesto que el límite existe. En este sentido nótese que la integrabilidad Riemann en $[a, \infty)$ de f no implica la integrabilidad Lebesgue de f en dicho intervalo. A tal efecto, estúdiese la integral:

$$\int_1^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx.$$

4. Constrúyase una sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrable Riemann en $[0, 1]$ tales que $0 \leq f_n(x) \leq 1$ para cada $x \in [0, 1]$ de forma que exista el límite puntual $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pero que $f(x)$ no sea integrable Riemann.

5. Sean f y f_n funciones acotadas e integrables Riemann en el intervalo $[0, 1]$ de suerte que $|f_n(x)| \leq K$ para $x \in [0, 1]$. Pruébese que si $f_n \rightarrow f$ para casi todo punto $x \in [0, 1]$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

6. Sea f un función absolutamente integrable en sentido de Riemann en $\mathbb{R}$, es decir, existe el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n |f(x)| dx := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Demuéstrase que f es entonces integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$ y que:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

7. Sean R el rectángulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ y f una función acotada en R . Sean π_1 una partición $\{x_0 \leq \dots \leq x_n\}$ de $[a, b]$, π_2 , $\{y_0 \leq \dots \leq y_m\}$ una partición de $[c, d]$. Defínanse:

$$M_{ij} = \sup_{I_i \times J_j} f, \quad m_{ij} = \inf_{I_i \times J_j} f$$

con $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, $|\pi| = \max\{|\pi_1|, |\pi_2|\}$. Las sumas superior e inferior se definen respectivamente como:

$$S_\pi = \sum_i \sum_j M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s_\pi = \sum_i \sum_j m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Asimismo,

$$\sigma_\pi = \sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j, \quad (\xi_i, \eta_j) \in I_i \times J_j,$$

define una suma de Riemann asociada a π .

La función f es integrable Darboux en R si los límites $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} s_\pi$, $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} S_\pi$ existen y coinciden. Análogamente, la integrabilidad Riemann de f es la existencia de $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sigma_\pi$. Se sabe que los dos conceptos de límite coinciden.

Demuéstrase que si f es medible entonces la integral de Lebesgue de f en R coincide con la de Riemann en el supuesto de que f es integrable Riemann en R .

8. Por analogía con la integral de Darboux se introduce la integral de Riemann-Stieltjes como sigue. Para f, g acotadas, g monótona creciente¹ considérense las sumas superior e inferior:

$$S_\pi = \sum_i M_i \Delta g_i, \quad s_\pi = \sum_i m_i \Delta g_i,$$

$M_i = \sup_{I_i} f$, $m_i = \inf_{I_i} f$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$. Se dice que f es Riemann-Stieltjes integrable si existen y coinciden los límites $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} s_\pi$, $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} S_\pi$. Una suma de Riemann se define como:

$$\sigma_\pi = \sum_i f(y_i) \Delta g_i,$$

¹Véase T. M. Apostol, Análisis Matemático, Reverté, Barcelona, 1982.

con $y_i \in I_i$. La integrabilidad Riemann-Stieltjes se define como la existencia del límite $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sigma_\pi$. Se sabe² que las dos nociones coinciden. Demuéstrese la integrabilidad Riemann-Stieltjes de funciones continuas f en $[a, b]$ con respecto a integradores de variación acotada g en $[a, b]$.

9. Sean f continua en $[a, b]$, g monótona creciente en $[a, b]$ y continua por la derecha. Pruébese que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{(a,b]} f(x) d\mu_g,$$

donde μ_g es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a g .

10. Sean, f continua y g de variación acotada en $[a, b]$. Demuéstrese que:

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq V(g) \sup_{[a,b]} |f(x)|,$$

donde $V(g)$ es la variación total de g sobre $[a, b]$.

11. Si f es integrable Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$ son números fijados, demuéstrese que para todo h se tiene que:

$$\int_{[a,b]} f_h(x) dx = \int_{[a+h,b+h]} f(x) dx,$$

donde $f_h(x) = f(x + h)$.

²Ver la referencia de Apostol.