Teoría de la Medida. Curso 2003-2004.

Capítulo III. Integración de Lebesgue: propiedades de convergencia.

Integración de funciones simples.

1. Demuéstrese que si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son números reales, $E_1, \dots, E_m$ son conjuntos medibles, entonces $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{E_i}$ es una función simple.

2. Pruébese que si f, g son simples e integrables, fg también lo es.

3. Una función medible f se dice escalonada si existen $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$ tales que f es constante sobre cada (x_{i-1}, x_i), $1 \leq i \leq m$, siendo cero en el resto. Pruébese que la suma y el producto de funciones escalonadas lo es.

4. Demuéstrese que una función integrable simple f es cero para casi todo $x \in X$ si y sólo si $\int_E f \, d\mu = 0$ para todo conjunto medible E.

5. Si f es integrable y simple, $f \geq 0$ para casi todo punto, probar que $\int f \, d\mu = 0$ implica que $f = 0$ para casi todo punto.

Funciones integrables.

6. Sean f, g funciones medibles, f integrable, $f = g$ para casi todo punto. Pruébese que g es integrable con $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$.

7. Probar que si f es integrable, entonces $N = \{x : |f(x)| \neq 0\}$ es σ-finito.

8. Sea f una función medible. Demuéstrese que f es integrable si y sólo si lo son f^+ y f^- siendo:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Demuéstrese también que f es integrable si y sólo si lo es $|f|$.

9. Consideremos en $\mathbb{N}$ la medida que asigna a cada conjunto su número de elementos. Pruébese que f es integrable si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es absolutamente convergente con:

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

10. Una función de la forma $\chi_{(a,b)}\varphi$ con φ escalonada en $\mathbb{R}$ se dice escalonada en el intervalo (a, b), y por tanto existen $a = x_0 < x_1 \cdots < x_m = b$ tales que φ es constante en cada intervalo (x_{i-1}, x_i), $1 \leq i \leq m$. Demuéstrese que si f es integrable en el intervalo

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

(a, b) existe una sucesión de funciones escalonadas φ_m tales que $\int |f - \varphi_n| \, d\mu \to 0$ con $\varphi_n \to f$ para casi todo $x \in (a, b)$.
Indicación. Probar el resultado en primer lugar para el caso más sencillo de f simple. A tal fin usar que si E medible, $\mu(E) = \inf\{\mu(G) : E \subset G, \ G \subset \mathbb{R} \text{ abierto}\}$.

11. Sea f integrable en (a, b). Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ existe $g \in C[a, b]$ tal que $\sup_{(a,b)\setminus E} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ com $\mu(E) < \delta$.

12. Se dice que una función compleja f es simple si $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ donde los E_i son medibles disjuntos y los $c_i \in \mathbb{C}$. Se dice que una tal f es integrable si $\mu(E_i) < \infty$ siempre que $c_i \neq 0$. Se define la integral $\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i)$. Como en el caso real, se dice que una función compleja medible f es integrable si existe una sucesión f_n de funciones simples que es de Cauchy en media, es decir $\lim_{m,n\to\infty} \int |f_n - f_m| \, d\mu \to 0$, mientras $\lim f_n(x) = f(x)$ para casi todo $x \in X$. Denuéstrese que una función compleja $f = f_1 + i f_2$ es integrable si y sólo si lo son f_1 y f_2, siendo $\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + i \int f_2 \, d\mu$.

Propiedades elementales.

13. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ y $(X, \mathcal{A}, \mu_2)$ espacios de medida, $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Probar que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, que una función simple f es μ_i integrable para $i = 1, 2$ si sólo si es μ integrable y

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu_1 + \int f \, d\mu_2.$$

Finalmente, probar que una función medible f es μ_i integrable $i = 1, 2$ si sólo si es μ integrable y

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu_1 + \int f \, d\mu_2.$$

14. Pruébese que si f es integrable y g es simple con $|f| \geq |g|$ entonces g es integrable.

15. Sea f una función integrable. Demuéstrese que si $\int_E f \, d\mu \geq 0$ para todo E medible entonces $f \geq 0$ para casi todo punto. Asimismo, pruébese que si $\mu(X) < +\infty$ y $\int_E f \, d\mu \leq \mu(E)$ para todo conjunto medible E entonces $f \leq 1$ para casi todo punto.

16. Demostrar que $f(x) = \text{ sen } x + \cos x$ no es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$.

17. Demostrar que $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ no es integrable Lebersgue en $(1, +\infty)$.

18. Demostrar que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es integrable Lebersgue en $(0, 1)$.

19. Sea f una función integrable tal que:

$$0 < m \leq f(x) \leq M \qquad \text{para casi todo } x \in X,$$

para ciertas constantes positivas m, M. Demuéstrese que:

$$m\mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq M\mu(E).$$

Sucesiones de funciones integrables.

20. Se dice que una función medible f es una *función nula* si $f(x) = 0$ para casi todo punto. Se dice que dos funciones medibles f, g son equivalentes $f \sim g$ si $f - g$ es nula. Denotemos por $\bar{f}$ la clase de f siendo $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (alias $L^1(X)$) el conjunto de todas las clases de las funciones integrables. Pruébese que $L^1(X)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|\bar{f}\|_1 = \int f \, d\mu,$$

con $f \in \bar{f}$.

21. Sea g una función integrable en (a, b) mientras:

$$f(x) = \int_{(a,x)} g \, d\mu$$

(en sentido de Lebesgue). Probar que f es absolutamente continua.

22. Probar que f es de variación acotada si y sólo si $f = g_1 - g_2$ donde g_1, g_2 son funciones crecientes. Probar que si f es continua, las g_1, g_2 se pueden elegir continuas.
Indicación. Ensayar como g_1 la variación de a hasta x.

23. Probar que si f es absolutamente continua entonces es de variación acotada.

24. Demuéstrese que $f(x) = x$ sen $(1/x)$ es uniformemente continua pero no de variación acotada en $(0, 1)$.

25. Supongamos que una función medible f es integrable sobre todos los conjuntos E de medida finita. Estúdiese si $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$ puede ser o no completamente aditiva.

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, aplicaciones.

26. Sea $f_n(x) = n$ si $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = 0$ si $1/n \leq x \leq 1$. Probar que $\lim f = 0$ para casi todo $x \in [0, 1]$ mientras $\int_{[0,1]} f_n \, d\mu = 1$ para cada n. Esto prueba que la condición de acotación del teorema de la convergencia dominada es fundamental.

27. Consideremos en $\mathbb{N}$ la medida del número de elementos con:

$$f_n(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Demuéstrese que $f_n \to 0$ uniformemente mientras $\lim \int f_n \, d\mu \neq \int f \, d\mu$ (contrastar con el teorema de la convergencia dominada).

28. En el espacio de medida del ejercicio anterior tomamos:

$$f_n(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n, \end{cases}$$

con $f(k) = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que f_n converge uniformemente a f mientras que f no es integrable.

28. Supongamos que $\mu(X) < +\infty$ mientras f_n una sucesión de funciones medibles e integrables en X que converge uniformemente a una función f. Probar que f es integrable y $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

29. Sean f, g funciones medibles. Probar que f, g son integrables si $\sqrt{f^2 + g^2}$ lo es. Probar que fg es integrable si f^2, g^2 lo son.

30. Deducir el teorema de la convergencia dominda del Lema de Fatou.

31. Sea $\mu(X) < +\infty$. Probar que una sucesión de funciones medibles $f_n \to 0$ en medida si y sólo si:

$$\int \left\{ \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} \right\} d\mu \to 0 \qquad n \to \infty.$$

32. Sea X un espacio de mediad finita. Para $\bar{f}, \bar{g} \in L^1(X)$ se define:

$$d(\bar{f}, \bar{g}) = \int \left\{ \frac{|f - g|}{1 + |f - g||} \right\} d\mu.$$

Demostrar que $L^1(X)$ es completo con esta métrica.

33. Sea $\mu(X) < \infty$ y $f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$. Supóngase que $f(\cdot, t)$ es integrable para cada t fijo, mientras la derivada parcial $\partial f / \partial t(x, t)$ existe y está uniformemente acotada para $x \in X$, $t \in (a, b)$. Entonces $\partial f / \partial t(\cdot, t)$ es integrable para cada t, $\int f(x, t) \, dx$ es diferenciable con respecto a t y además:

$$\frac{d}{dt} \int f(x, t) \, dx = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \, dx.$$

34. Sea $f \geq 0$ medible en $\mathbb{R}$ con $\int_{(0,\infty)} f(x) \, dx < \infty$. Probar que:

$$g(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-tx} f(x) \, dx \quad (0 < t < \infty),$$

es diferenciable y que:

$$g'(t) = -\int_{(0,\infty)} xe^{-tx} f(x)\ dx.$$

35. Sea f_n una sucesión de funciones integrables. Demuéstrese que si $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\ d\mu < \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a una función integrable f y:

$$\int f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\ d\mu.$$

36. Sea f_n una sucesión de funciones integrables no negativas de la que se sabe que la serie $\sum f_n$ es una función integrable. Pruébese que:

$$\sum \int f_n\ d\mu < \infty.$$

37. Sean f_n, f funciones integrables tales que $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ para casi todo $x \in X$. Entonces:

$$\int \underline{\lim} f_n\ d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n\ d\mu \leq \overline{\lim} \int f_n\ d\mu \leq \int \overline{\lim} f_n\ d\mu.$$

Extiéndase el resultado al caso en que $|f_n(x)| \leq f(x)$ para casi todo $x \in X$.

38. Sean $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \subset E_{n+1}$ para cada n y $f \geq 0$ medible. Demuéstrese que:

$$\int f\ d\mu = \lim \int_{E_n} f\ d\mu.$$

Nótese que en algunos casos el valor de la integral en el primer miembro podría ser ∞.

39. Sea $f \geq 0$ medible y

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq n \\ n & f(x) > n. \end{cases}$$

Pruébese que $\int f\ d\mu = \lim \int f_n\ d\mu$ (la integral del primer miembro podría ser ∞ en algunos casos).

40. Sean $f_1, \ldots, f_k$ funciones integrables. Probar que $\max\{f_1, \ldots, f_k\}$ es también integrable.

41. Dése un ejemplo donde se satifaga el Lema de Fatou con la desigualdad estricta.

42. Sea f una función real definida en un espacio de medida finita. Defínase:

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu[\ \{x :\ \frac{k}{2^n} < f(x) \leq \frac{k+1}{2^n}\}\ ] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si f es integrable cada serie es convergente y

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} s_n. \tag{1}$$

Recíprocamente, si para algún n la serie s_n converge absolutamente entonces f es integrable y se verifica (1).
[*Indicación*]. Si f no negativa e integrable aplíquese el teorema de la convergencia monótona a la sucesión $f_n(x) = k/2^n$ si:

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Si $f \geq 0$ y una de las series, por ejemplo s_n, es convergente, úsese entonces la desigualdad $f(x) \leq f_n(x) + 1/2^n$.

43. Denotemos por $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, más brevemente $L^\infty(X, \mu)$, las clases de equivalencia $\bar{f} = \{g : X \to \overline{\mathbb{R}} : \text{medible}, \ g = f \text{ para casi todo } x \in X\}$ donde f es medible y acotada esencialmente. Demuéstrese que $L^\infty(X, \mu)$ es un espacio métrico completo con la distancia:

$$d(\bar{f}, \bar{g}) = d(f, g) = \sup_{x \in X} \text{esen} \, |f(x) - g(x)|.$$