Teoría de la Medida. Curso 2003-2004.

Capítulo II. Funciones medibles. Convergencia.

Funciones medibles.

1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de Y, pruébese que:

(1) $f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i)$.
(2) $f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i)$.
(3) Para $A \subset Y$, $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$.
(4) Para $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X: $f(\cup_i B_i) = \cup_i f(B_i)$.
(5) Para $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X: $f(\cap_i B_i) \subset \cup_i f(B_i)$. Póngase un ejemplo para ilustrar la falsedad del contenido contrario.

2. Pruébese que cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$ se puede expresar como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos.

Propiedades básicas.

3. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible, $Y \subset X$, $Y \in \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A}_Y = \{E \in \mathcal{A} : E \subset Y\}$, $\mu_Y(E) = \mu(E)$ para $E \in \mathcal{A}_Y$. Pruébese que $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ es un espacio medible. Tal espacio es llamado un subespacio medible de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

4. Sea $Z \subset X$ y $(Z, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio medible. Pruébese que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio medible donde $\mathcal{A} = \{E : E \cap Z \in \mathcal{B}\}$, $\mu(E) = \nu(E \cap Z)$, $E \in \mathcal{A}$. Pruébese también que $(Z, \mathcal{A}_Z, \mu_Z)$ es el propio espacio $(Z, \mathcal{B}, \nu)$.

5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible, $Y \in \mathcal{A}$ y $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Pruébese que f es medible si y sólo si es medible como función en Y con respecto al subespacio $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

6. Pruébese que una función f es medible si: (i) para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(-\infty, c]$ es medible, y (ii) los conjuntos $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(+\infty)$ son medibles.

7. Pruébese que una función f es medible si: (i) para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(c, +\infty)$ (alternativamente, el conjunto $f^{-1}[c, +\infty)$) es medible, y (ii) los conjuntos $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(+\infty)$ son medibles.

8. Para E se define la función característica χ_E de E como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

Pruébese que E medible si y sólo si χ_E medible.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

8′. Si Y, X son conjuntos Y^X se define como el conjunto de las aplicaciones $f : X \to Y$. Usando la idea de función característica ¿ se te ocurre por qué 2^X suele designar al conjunto de todos los subconjuntos de X?.

9. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles y $E^* = \overline{\lim}\, E_n$. Pruébese que:

$$\chi_{E^*}(x) = \overline{\lim}\, \chi_{E_n}(x).$$

10. Se define la parte positiva f^+ de una función f como:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) \leq 0, \end{cases}$$

mientras la parte negativa f^- se define como:

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pruébese que f es medible si y sólo si f^+ y f^- son medibles.

11. Si f es medible, entonces $|f|$ y $|f|^2$ son medibles.

12. Una función monótona definida en la recta real es medible-Lebesgue.

12′. Pruébese que una función monótona tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.

13. Se dice que una función real f definida en un espacio métrico X es semicontinua superiormente (inferiormente) si para cada $x \in X$:

$$\overline{\lim_{y \to x}}\, f(y) \leq f(x) \qquad [\ f(x) \leq \underline{\lim_{y \to x}}\, f(x)\ ].$$

Pruébese que si X está dotado de una medida exterior métrica y f es semicontinua inferior o superiormente entonces f es medible.
Indicación. Nótese que:

$$\underline{\lim_{y \to x}}\, f(y) = \sup_{\delta \to 0+} \{ \inf_{y \in B(x,\delta) \setminus \{x\}} f(y) \}.$$

Demuéstrese que f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(c, +\infty)$ es abierto para cada c.

14. Se dice que una función compleja f es medible si para cada abierto $G \subset \mathbb{C}$ se tiene que $f^{-1}(G)$ es medible. Pruébese que f es medible si y sólo si sus partes real e imaginaria son funciones medibles.

Operaciones con funciones medibles.

15. Sean $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ medible-Borel y f una función medible real sobre un espacio medible X. Pruébese que $h(x) = g(f(x))$ es medible.

16. Sean $g(u_1, \ldots, u_k)$ continua en $\mathbb{R}^k$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ funciones medibles. Probar que $h(x) = g(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$ es medible. Obsérvese que en particular:

$$\max\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\} \qquad \min\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\},$$

son funciones medibles.

17. Sea $f(x)$ una función medible y defínase:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0. \end{cases}$$

Pruébese que g es medible.

18. Se define la *clase de Baire* n-ésima $\mathcal{B}_n$ de funciones f como: $f \in \mathcal{B}_n$ si f es el límite *puntual* de una sucesión de funciones $\{f_k\} \subset \mathcal{B}_{n-1}$, siendo $\mathcal{B}_0$ la clase de las funciones continuas. Pruébese que todas las funciones de $\mathcal{B}_n$ son medibles.

19. Pruébese que la función característica $\chi_{\mathbb{Q}}$ de los racionales en $\mathbb{R}$ pertenece a $\mathcal{B}_2$.

20. Sea f medible y defínase:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1 & f(x) \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pruébese que g es medible.

21. Pruébese que una función medible es el límite *puntual* de una sucesión de funciones simples.

22. Si f es una función medible y acotada entonces es el límite *uniforme* de una sucesión de funciones simples.

Teorema de Egoroff.

23. Sea $\mathbb{R}$ la recta real con la medida de Lebesgue, f_n la función característica del intervalo $[n, \infty)$. Probar que f_n converge en casi todo $x \in \mathbb{R}$ pero no converge casi-uniformemente.

24. Sea f_n una sucesión de funciones medibles en un espacio de medida finito X. Supóngase que el conjunto $\{f_n(x)\}$ es acotado para casi todo $x \in X$. Pruébese que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $c > 0$ y un conjunto medible $E \subset X$ con $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ tal que $|f_n(x)| \leq c$ para todo $x \in E$.

Convergencia en medida.

25. Sea X un espacio de medida $\mu(X) < +\infty$. Sea f_n una sucesión de funciones medibles finitas para casi todo punto, que converge a una función f para casi todo punto siendo $f \neq 0$, $f_n \neq$ para cada n y en casi todo punto. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $b > 0$ y un conjunto medible E_n tales que $|f_n(x)| \geq b$ en E_n y $\mu(E_n^c) < \varepsilon$.
Indicación. Demuéstrese primero la afirmación para la función f.

26. Sea X un espacio de medida finita. Sean f_n, g_n sucesiones de funciones medibles que son finitas para casi todo punto y que respectivamente convergen en medida a f y g. Sean α, β números reales arbitrarios. Entonces:

a) $\alpha f_n + \beta g_n$ converge en medida a $\alpha f + \beta g$.
b) $|f_n|$ converge en medida a $|f|$.
c) $f_n g$ converge en medida afg.
d) $f_n g_n$ converge en medida a fg. [*Indicación.* Considérese primero el caso $f = g = 0$.]
e) Si $f_n \neq 0$ para casi todo punto y si $f \neq 0$ para casi todo punto entonces $1/f_n$ converge a $1/f$ en medida. [*Indicación.* Usar el problema 25].

27. Sea f_n una sucesión de funciones medibles finitas para casi todo punto en un espacio de medida finita X. Para cada $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ sea:

$$E_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Demuéstrese que $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in X$ si y sólo si:

$$\lim_{n\to\infty} \mu[\cup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)] = 0. \tag{1}$$

Indicación. Sea $F = \{x : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\}$. Entonces $F = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim} E_n(1/k)$. Demuéstrese que $\mu(F) = 0$ si y sólo si se satisface (1).

28. Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ la clase de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, μ la medida en $\mathcal{A}$ que da el número de elementos. Demuéstrese que en este espacio la convergencia en medida equivale a la convergencia uniforme.

29. En $[0, 1)$ se definen las funciones $f_m^n(x)$ como 1 si $x \in [(m-1)/n, m/n)$, 0 en el resto. Enumérense las funciones para construir una sucesión φ_j que converge en medida a cero pero que es tal que $\lim \varphi_j(x)$ no exise en ningún $x \in [0, 1)$.

30. Sea f_n una sucesión de funciones medibles finitas para casi todo punto en un espacio X de medida finita. Pruébese la existencia de una sucesión $\lambda_n > 0$ tal que $\lambda_n^{-1} f_n$ converge a cero para casi todo $x \in X$.
Indicación. Pruébese que $|f_n(x)| \leq c =$ constante sobre un conjunto E_n con $\mu(X \setminus E_n) < 2^{-n}$.