TEORIA DE LA MEDIDA. CURSO 2003-2004.

Capítulo I. Álgebras, σ-álgebras. Medidas y medidas exteriores.

Anillos, σ-anillos, álgebras, σ-álgebras.

1. Sean a_n, b_n, sucesiones reales *monótonas* tales que $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a < b$, mientras $E_n = (a_n, b_n)$. Pruébese que $E = \lim E_n$ existe, calculando su "valor".

2. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos en X. Para cada n definamos $B_n = \cup_{k \geq n} E_k$, $C_n = \cap_{k \geq n} E_k$. Designemos:

$$E^* = \cap_n B_n = \lim B_n \qquad E_* = \cup_n C_n = \lim C_n.$$

Demuéstrese que:

$$E^* = \overline{\lim}\, E_n \qquad E_* = \underline{\lim}\, E_n.$$

3. Si $\{E_n\}$ es una sucesión en X pruébese que:

$$\left(\overline{\lim}\, E_n\right)^c = \underline{\lim}\, E_n^c,$$

$$\left(\underline{\lim}\, E_n\right)^c = \overline{\lim}\, E_n^c.$$

4. Si $\mathcal{R}$ es sólo un σ-anillo y $\{E_n\} \subset \mathcal{R}$ probar que:

$$\cap_n E_n \in \mathcal{R}, \qquad \underline{\lim}\, E_n \in \mathcal{R}, \qquad \overline{\lim}\, E_n \in \mathcal{R}.$$

5. Sea $\mathcal{R}$ un σ-anillo en X, $Y \subset X$, $Y \in \mathcal{R}$. Probar que $\{Y \cap E : E \in \mathcal{R}\}$ es una σ-álgebra en Y.

6. Si $\{\mathcal{R}_\alpha\}$ es una familia de anillos (respectivamente, σ-anillos, álgebras, σ-álgebras) probar que $\cap_\alpha \mathcal{R}_\alpha$ es un anillo (respectivamente, σ-anillo, álgebra, σ-álgebra).

7. Sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de X. Demuéstrese que existe un único anillo $\mathcal{R}$ (respectivamente, σ-anillo, álgebra, σ-álgebra) con la propiedades:
1) $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$,
2) Si $\mathcal{R}'$ es un anillo (respectivamente, σ-anillo, álgebra, σ-álgebra) con $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}'$ entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$.

Denotaremos $\mathcal{R}$ por $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ y lo denominaremos el anillo generado por $\mathcal{D}$. Utilizaremos $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ en el caso de σ-anillos.

8. Sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de X. Demuéstrese que cada elemento de $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ puede recubrirse con un número finito de elementos de $\mathcal{D}$, es decir está contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{D}$.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Nota. El ejercicio no demanda probar que $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ es la clase de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{D}$ (hecho que por otro lado no es cierto). Un comentario similar se aplica al ejercicio siguiente.

9. Sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de X. Demuéstrese que cada elemento de $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ puede recubrirse con una familia numerable de elementos de $\mathcal{D}$, es decir está contenido en una unión numerable de elementos de $\mathcal{D}$.

10. Sea $\mathcal{D}$ la clase de todos aquellos conjuntos en X que son finitos o tienen complemento finito. Probar que $\mathcal{D}$ es un anillo mientras que si X no es finito, $\mathcal{D}$ no es un σ-anillo.

11. En $X = \mathbb{R}$ consideramos $\mathcal{A} = \{\cup_{k=1}^{n} J_k : J_k = (a_k, b_k], J_i \cap J_l = \emptyset \quad i \neq l\}$. Demostrar que $\mathcal{A}$ es un anillo pero no un álgebra.

12. En un conjunto X se toma $\mathcal{D} = \{\{a\}, \{b\}\}$ con $a \neq b$. Hallar $\mathcal{R}(\mathcal{D})$.

Medidas.

13. Sea μ una función de conjunto en X con dominio en una cierta clase de conjuntos $\mathcal{A}$ y valores en $\overline{\mathbb{R}}$ cumpliendo:

(1) $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.
(2) μ es no negativa.
(3) μ es completamente aditiva.

Probar que si $\mu(E) < \infty$ para algún $E \in \mathcal{A}$ entonces $\mu(\emptyset) = 0$ (es decir, μ es una medida).

14. Sea X un conjunto infinito mientras $\mathcal{A}$ es la clase de todos los subconjuntos de X. Definimos $\mu(E) = 0$ si E es finito, $\mu(E) = \infty$ si E es inifito. Pruébese que μ es finitamente aditiva pero no completamente aditiva.

15. Si μ es una medida sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$, $E, F \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

16. Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión (finita o infinita) de medidas definidas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Defínase la suma $\sum_n \mu_n$ de las medidas como:

$$\left(\sum_n \mu_n\right)(E) = \sum_n \mu_n(E) \qquad E \in \mathcal{A}.$$

Demuéstrese que $\sum_n \mu_n$ es una medida.

17. Supongamos que X está consitituido por la sucesión $\{x_n\}$ mientras $\{p_n\}$ es una sucesión de números no negativos. Para $A \subset X$ defínase:

$$\mu(A) = \sum_{x_m \in A} p_m.$$

Probar que μ es una medida σ-finita.

18. Construýase un ejemplo de medida μ y una sucesión decreciente $\{E_n\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mu(E_n) = \infty$ para todo n mientras $\mu(\lim E_n) = 0$.

Medidas exteriores.

19. Defínase $\mu^*(E)$ como el número de elementos de E si tal conjunto es finito, $\mu^*(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ^* es una medida exterior. Determinar los conjuntos medibles.

20. Defínase $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(E) = 1$ si $E \neq \emptyset$. Probar que μ^* es una medida exterior. Determinar los conjuntos medibles.

21. Supóngase que X posee una cantidad no numerable de puntos. Si $\mu^*(E) = 0$ para E numerable, $\mu^*(E) = 1$ si E es no numerable. Demostrar que μ^* es una medida exterior. Determinar los conjuntos medibles.

22. Probar que todos los conjuntos nulos de una medida exterior μ^* (E es nulo si $\mu^*(E) = 0$) son medibles.
Nota. Esto significa, como veremos más adelante que todas las medidas que proceden de una medida exterior son *completas*.

23. Sea μ^* una medida exterior y $B \subset X$ un conjunto fijado. Defínase $\nu^*(A) = \mu^*(A \cap B)$. Probar que ν^* es una medida exterior determinando la relación entre los conjuntos medibles de μ^* y los de ν^*.

24. (Cf. el ejercicio 16) Sea $\{\mu_n^*\}$ una sucesión (finita o infinita) de medidas exteriores. Defínase la suma $\sum_n^* \mu_n$ como:

$$\left(\sum_n \mu_n^*\right)(A) = \sum_n \mu_n^*(A) \qquad A \subset X.$$

Demuéstrese que $\sum_n \mu_n^*$ es una medida exterior.

25. Demuéstrese que si una medida exterior es finitamente aditiva entonces es una medida.

Clases recubridoras numerables. [1]

Si $\mathcal{K}$ es una clase de recubrimiento numerable en X y λ es una función de conjunto no negativa con dominio $\mathcal{K}$ y valores en $\overline{\mathbb{R}}$, se recuerda que la medida exterior asociada a $(\mathcal{K}, \lambda)$ es:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) : A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \{A_n\} \subset \mathcal{K}\right\}. \tag{1}$$

[1] Sequential covering classes (cf. A. Friedman, "Foundations of Modern Analysis" [FMA], Dover, NY 1982).

26. Supongamos que $\mathcal{K}$ consta de $X, \emptyset$ y los conjuntos con un elemento. Sea $\lambda(X) = \infty$, $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(E) = 1$ si $E \neq X$, $E \neq \emptyset$. Describir μ^*.

27. Para X no numerable y $\mathcal{K}$ como en el problema anterior supongamos que $\lambda(X) = 1$, $\lambda(E) = 0$ si $E \neq X$. Descríbase μ^*.

28. Supongamos que $(\mathcal{K}, \lambda)$ cumple las condiciones previas que permiten construir la medida exterior μ^* como en (1). Probar que $\mu^*(E) \leq \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{K}$. Dése un ejemplo donde la desigualdad resulta estricta.

29. Si $\mathcal{K}$ es una σ-álgebra y λ es una medida sobre $\mathcal{K}$, donde admitimos que $\mathcal{K}$ es una clase de recubrimiento numerable pruébese que $\mu^*(A) = \lambda(A)$ para todo $A \in \mathcal{K}$.
Indicación. Establecer que: $\mu^*(A) = \inf\{\lambda(E) : E \in \mathcal{K}, A \subset E\}$.

30. Si el par $(\mathcal{K}, \lambda)$ constituyen una σ-álgebra (con la propiedad de recubrimiento numerable) y una medida, pruébese que todos los elementos de $\mathcal{K}$ son μ^*- medibles.
Nota. Los problemas 29-30 afirman que si $(\mathcal{K}, \lambda)$ es una σ-álgebra y una medida, entonces μ^* definida por (1) y observada como medida en la clase de sus conjuntos medibles, constiuye una extensión de la medida λ.

Medidas completas.

31. Sea μ una medida completa, $\mathcal{N}$ la clase formada por todos aquellos conjuntos con medida nula. Probar que $\mathcal{N}$ es un σ-anillo. ¿Es una σ-álgebra?

32. Sea $(\mu, \mathcal{A})$ una medida y $(\bar{\mu}, \overline{\mathcal{A}})$ su compleccíón. Si definimos:

$$\mathcal{A}^* = \{E \setminus N : E \in \mathcal{A}, \quad \mu(N) = 0\}.$$

Demostrar que $\mathcal{A}^* = \overline{\mathcal{A}}$.

Medida de Lebesgue.

En $\mathbb{R}^n$ se considera la clase $\mathcal{K}$ de los intervalos abiertos

$$I_{a,b} = (a_1, b_1) \times \cdots (a_n, b_n),$$

$a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, con la función:

$$\lambda(I_{a,b} = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

La correspondiente medida μ se denomina la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ ([FMA]), mientras que la medida exterior μ^* se denomina se denomina medida exterior de Lebesgue.

33. Los puntos de $\mathbb{R}^n$ son medible-Lebesgue de medida cero. Asimismo los conjuntos numerables de $\mathbb{R}^n$ son medible-Lebesgue y tienen medida cero.

34. La medida exterior de Lebesgue de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es $\mu[a, b] = b - a$. Probar que los intervalos $(a, b), [a, b), (a, b]$ tienen la misma medida exterior.

35. Considérese la transformación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$. Demostrar que T aplica conjuntos E medible-Lebesgue sobre conjuntos $T(E)$ medible-Lebesgue. Demuéstrese asimismo que:

a) Para cada E: $\mu^*(T(E)) = |\alpha|\ \mu^*(E)$.
b) E de Lebesgue si y sólo si $T(E)$ de Lebesgue.
c) Si E es de Lebesgue entonces $\mu(T(E)) = |\alpha|\ \mu(E)$.

Espacios métricos.

36. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en X. Demostrar que $x_n \to y$ si y sólo si cada subsucesión $\{x_{n_k}\}$ admite a su vez una subsucesión convergente a y.

38. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $A \subset X$. Demostrar que si A es cerrado con $x \notin A$ entonces $\rho(x, A) > 0$.

39. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $A \subset X$, $x, y \in X$. Si $\rho(x, A) > \alpha > \beta > \rho(y, A)$ pruébese que $\rho(x, y) > \alpha - \beta$.

40. Sea (X, ρ) un espacio métrico en donde $\mathcal{B}$ designa la clase de los conjuntos de Borel (los borelianos). Si $\mathcal{C}$ representa la σ-álgebra generada por los conjuntos cerrados pruébese que $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

41. Designemos por $\mathcal{P}$ la clase de los intervalos $[a, b)$ en $\mathbb{R}$. Demuéstrese que la σ-álgebra generada por $\mathcal{P}$ coincide con la de los conjuntos de Borel $\mathcal{B}$.

Medidas exteriores métricas.

Se dice que una medida exterior μ^* definida en un espacio métrico (X, ρ) es *métrica* (cf. [FMA]) si:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

cualesquiera que sean $A, B \subset X$ con la propiedad de que $\rho(A, B) > 0$ (por ejemplo A, B dos cerrados disjuntos).

42. Demuéstrese que si (X, ρ) es un espacio métrico dotado de una medida exterior μ^* para la que los abiertos son conjuntos medibles, entonces μ^* es una medida exterior métrica.

43. Sea μ una medida cuyo dominio es la σ-álgebra $\mathcal{A}$. Para $E, F \in \mathcal{A}$ se define:

$$\rho(E, F) = \mu\left((E \setminus F) \cup (F \setminus E)\right).$$

Pruébese que ρ satisface la desigualdad triangular en $\mathcal{A}$, es decir:

$$\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G),$$

cualesquiera que sean $E, F, G \in \mathcal{A}$.

44. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en X. Para $E \subset X$ definamos $\mu^*(E)$ como el número de puntos x_n que pertenecen a $\overline{E}$. Pruébese que μ^* es una medida exterior métrica.

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: propiedades más finas.

45. Sea $\mathcal{K}$ la clase de los intervalos abiertos $I_{a,b} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ en $\mathbb{R}^n$ con

$$\lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Para $a_i \in \mathbb{R}$, $\delta_i > 0$, $r_i \in \mathbb{N}$ fijamos $b_i = a_i + r_i \delta_i$,

$$I_{a_i,b_i,\gamma_i} = (a_i + (\gamma_i - 1)\delta_i, a_i + \gamma_i \delta_i) \qquad \gamma_i = 1, \ldots, r_i.$$

Introducimos $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n)$ mientras que para $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \{1, \ldots, r_1\} \times \cdots \{1, \ldots, r_n\}$ definimos:

$$I_{a,b,\gamma} = \prod_{i=1}^{n} I_{a_i,b_i,\gamma_i}.$$

Probar que:

$$\lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma} \lambda(I_{a,b,\gamma}).$$

46. Sean $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbb{R}^N$, $a_i < b_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ mientras $I_{a-\varepsilon,b+\varepsilon} = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon)$. Demostrar que $\lambda(I_{a-\varepsilon,b+\varepsilon}) - \lambda(I_{a,b}) < c\varepsilon$ con $c = O(1)$ cuando $\varepsilon \to 0+$.
Nota. Resultará de mucha utilidad conocer cómo depende c de ε y de las diferencias $b_i - a_i$ (los lados de $I_{a,b}$).

47. El objetivo del ejercicio es probar que *los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos de Lebesgue* para lo cual demostraremos que la medida exterior de Lebesgue es métrica. Pruébese a tal fin que dados un intervalo $I_{a,b}$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ arbitrarios, existen intervalos abiertos $I_1, \ldots, I_N$, con

$$I_{a,b} \subset I_1 \cup \cdots I_N,$$

con $d(I_i) < 1/m$ para cada i ($d(A)$ es el diámetro de A), de suerte que:

$$\lambda(I_1) + \cdots + \lambda(I_n) \leq \lambda(I_{a,b}) + \varepsilon.$$

Indicación. Para cada $m \in \mathbb{N}$ fracciónese $I_{a,b}$ usando hiperplanos $x_i = a_i + \gamma_i \delta_i$, con los $\delta_i > 0$ pequeños como para que $d(I_{a,b,\gamma}) < 1/m$ para cada γ. Usar después que:

$$\lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma} \lambda(I_{a,b,\gamma}).$$

48. Supóngase que $\{I_{c_k,e_k}\}_{k=1}^m$ es un recubimiento por intervalos abiertos de un intervalo cerrado $\overline{I}_{a,b}$. Para $r \in \mathbb{N}$ arbitrario tomemos $\delta_i = b_i - a_i/r$. Pruébese la existencia de un recubrimiento $\{I_{\alpha_k,\beta_k}\}_{k=1}^m$ de $\overline{I}_{a,b}$ por intervalos abiertos, $\alpha_k = (\alpha_{ki})$, $\beta_k = (\beta_{ki})$, con:

$$\alpha_{ki} = a_i + \gamma_i'\delta_i \qquad \beta_{ki} = a_i + \gamma_i''\delta_i,$$

$\gamma_i', \gamma_i'' \in \mathbb{Z}$,

$$I_{c_k,e_k} \subset I_{\alpha_k,\beta_k},$$

y

$$\lambda(I_{\alpha_k,\beta_k}) \leq \lambda(I_{c_k,e_k}) + \frac{C}{r},$$

donde C no depende de r.
Indicación. Para i fijado, tómese α_{ki} el máximo $a_i + \gamma\delta_i \leq c_{i,k}$, γ entero, $\beta_{k,i}$ el mínimo $a_i + \gamma'\delta_i \geq e_{k,i}$, γ' entero.

49. Sea $\overline{I}_{a,b}$ un itervalo cerrado acotado. Pruébese que:

$$\mu^*(\overline{I}_{a,b}) = \mu(\overline{I}_{a,b}) = \lambda(\overline{I}_{a,b}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Indicación. Para una desigualdad usar que:

$$\mu^*(\overline{I}_{a,b}) \leq \mu^*(I_{a-\varepsilon,b+\varepsilon}) \leq \lambda(I_{a-\varepsilon,b+\varepsilon}) \qquad \varepsilon > 0,$$

a fin de concluir:

$$\mu^*(\overline{I}_{a,b}) \leq \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Para la desigualdad contraria pruébese que si $E_1, \ldots, E_m$ son intervalos abiertos cumpliendo:

$$\overline{I}_{a,b} \subset \cup_{k=1}^m E_k$$

entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se satisface que:

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \sum_{k=1}^m \lambda(E_k) + \varepsilon. \tag{1}$$

Tal estimación y la arbitrariedad de ε y los E_k lleva a que:

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \mu^*(\overline{I}_{a,b}).$$

A los efectos de probar (1) usamos el problema 48, construimos $I_{\alpha_k,\beta_k} \supset E_k$, $k = 1, \ldots, m$, con $\alpha_{ik} = a_i + \gamma_i\delta_i, \beta_{ik} = a_i + \gamma_i'\delta_i$, $\gamma_i, \gamma_i' \in \mathbb{Z}$, $\delta_i = (b_i - a_i)/r$, con $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $Cm/r < \varepsilon$, con C la constante del problema 48. Tenemos entones:

$$\lambda(I_{\alpha_k,\beta_k}) = \sum_{\gamma\in\Lambda_k} \lambda(I_{a,b,\gamma}), \qquad \lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma\in\Lambda} \lambda(I_{a,b,\gamma}),$$

$\Lambda = \{1, \ldots, r\}^k$, $\Lambda_k \subset \mathbb{Z}^k$, junto con:

$$I_{a,b} \subset \cup_{k=1}^m I_{\alpha_k,\beta_k},$$

de donde:

$$\Lambda \subset \cup_{k=1}^m \Lambda_k.$$

Se concluye de ahí que

$$\lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma\in\Lambda} \lambda(I_{a,b,\gamma}) \le \sum_{k=1}^m \sum_{\gamma\in\Lambda_k} \lambda(I_{a,b,\gamma}) = \sum_{k=1}^m \lambda(I_{\alpha_k,\beta_k}) \le \sum_{k=1}^m \lambda(E_k) + \varepsilon.$$

50. Sea $I_{a,b}$ un intervalo abierto acotado de R^n. Probar que:

$$\mu(I_{a,b}) = \mu^*(I_{a,b}) = \mu^*(\overline{I}_{a,b}) = \lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

51. Si F es medible-Lebesgue en R^n con $\mu(F) < \infty$ probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $G \supset F$ abierto tal que $\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon$.

52. Si F es medible-Lebesgue en R^n pruébese la existencia de un boreliano $E \supset F$ que cumple $\mu(E \setminus F) = 0$. Conclusión: todo conjunto de Lebesgue es parte de un conjunto de Borel del que difiere en un conjunto de medida nula (en particular tienen la misma medida).

53. Probar que una recta de $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 2$) tiene medida de Lebesgue cero. Más generalmente, probar que un plano k dimensional de $\mathbb{R}^n$ con $k \le n-1$ tiene medida cero.
Indicación La propiedad es consecuencia del problema 50 si los planos son paralelos a los hiperplanos coordenados $x_i = 0$ (ver también el problema 55).

54. Probar que el la esfera $\partial B(0,R)$ tiene medida cero ($B(0,R) = \{|x| < R\}$).
Indicación. Probar primero que $\mu(B(0,R)) = R^n \mu(B(0,1))$ (ver problema 55).

55. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación afín $Tx = Ax + k$, A matriz $n \times n$ invertible $k \in \mathbb{R}^n$. Se demostrará más tarde que $\mu(T(I_{a,b})) = |\det A|\lambda(I_{a,b})$. Pruébese que las afirmaciones del problema 35 se extienden al caso de R^n para la aplicación T.

56. *El conjunto ternario de Cantor*. Extráigase de $(0,1)$ el "tercio medio" del resultado de dividir el intervalo en tres partes iguales, es decir $I_1 = (1/3, 2/3)$. Procédase igual con cada uno de los intervalos restantes $(0,1/3)$ y $(2/3,1)$, es decir retiramos los intervalos $I_2 = (1/9, 2/9)$, $I_3 = (7/9, 8/9)$, repitiendo el proceso infinitas veces. El conjunto $\mathcal{C} = [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \cdots)$ se conoce como el ternario de Cantor. Pruébese que tiene medida cero.

Nota. Se puede demostrar que entre otras propiedades $\mathcal{C}$ no es numerable. Tiene exactamente el cardinal de $\mathbb{R}$.

56. Para una función creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua por la derecha, la medida μ_f de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$ se define a través de λ definida en la clase de los intervalos abiertos como:

$$\lambda(a, b) = f(b) - f(a).$$

Pruébese que.

$$\mu_f(a, b] = f(b) - f(a).$$

57. Pruébese que la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes es una medida exterior métrica.

58. Sea $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Probar que:

$$\mu_f\{(-1, 0)\} < f(0) - f(-1).$$

Medidas con signo.

59. Sea $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, μ una medida con signo tal que: $|\mu(A_n)| < \infty$ para cada n. Demuéstres que μ^+, μ^- son σ-finitas.

60. Sea μ una medida con signo mientras $\{E_n\}$ designa una sucesión monótona de conjuntos medibles (en la que se supone $|\mu(E_1)| < \infty$ en caso de la sucesión sea decreciente). Pruébese que:

$$\mu(\lim E_n) = \lim \mu(E_n).$$

61. Dese un ejemplo de medida con signo para la que la descomposición de Hahn no sea única.

62. Sean $\mu^{\pm}$ los elementos de la descomposición de Jordan de una medida con signo μ asociada a una descomposición de Hahn $X = A \cup B$, a saber:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \qquad \mu^-(E) = -\mu(E \cap B).$$

Pruébese que las medidas $\mu^{\pm}$ no dependen de la descomposición de Hahn. Es decir si $X = A' \cup B'$ define una nueva descomposición, entonces:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A') \qquad \mu^-(E) = -\mu(E \cap B').$$

63. Una medida compleja es por definición una función de conjunto $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, es decir con valores finitos, tal que i) $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, ii) μ es completamente aditiva, iii) $\mu(\emptyset) = 0$. Pruébese que μ es una medida compleja con dominio en $\mathcal{A}$ si y sólo si existen medidas μ_i, $1 \leq i \leq 4$, tales que:

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4).$$