SEMINARIO DE ANALISIS MATEMATICO. Sucesiones y Series de Funciones

1. Determinar en cada caso, el límite puntual en el conjunto A de la sucesión de funciones (f_n) y estudiar si la convergencia es uniforme o no:

$$a)\ A = [0\,,\,1],\ f_n(x) = \frac{x}{x+n} \qquad b)\ A = \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

$$c)\ A = [0\,,\,\pi],\ f_n(x) = \frac{sen\,nx}{n} \quad d)\ A = [0\,,\,2],\ \ f_n(x)\ =\ e^{-nx}$$

2. Sea f una función continua en $[0\,,\,1]$ tal que $f(1) = 0$. Probar que la sucesión de funciones (g_n) de $[0\,,\,1]$ en $\mathbb{R}$ definida por $g_n(x) = x^n f(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in [0\,,\,1]$ converge uniformemente en $[0\,,\,1]$.

3. Sea (f_n) la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por : $f_n(x) = \dfrac{2nx\ +\ sen^6 nx}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Hallar la función límite puntual, estudiar si la convergencia es uniforme o no y calcular

$$lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx.$$

4. Determinar la función f límite puntual de la sucesión de funciones (f_n) de $[0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ en $\mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = cos^n x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ y estudiar si la convergencia es uniforme o no y si es cierta o no la relación:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\ =\ lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$$

5. Probar que la sucesión (f_n) de funciones de $[0\,,\,1]$ en $\mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n^2\,x\,e^{-nx^2}$ converge a una función integrable y que sin embargo,

$$lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\ =\ +\infty$$

6. Determinar la función f límite puntual de la sucesión de funciones (f_n) de $(-1\,,\,1)$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{1\ +\ n^2x^2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in (-1\,,\,1)$ y estudiar si la convergencia es uniforme o no y si es cierta o no la relación: $lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x)\ =\ f^{'}(x)$.

7. Demostrar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\ (3^n x)}{2^n}$ es uniformemente convergente en toda la recta real.

8. Demostrar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^n x}{n^{\frac{5}{2}}}$ es uniformemente convergente en toda la recta real.

9. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos\ (nx^2)}{n!}$

10. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}-1}{2^n e^{nx}}$ en el intervalo $[0\,,\,+\infty[$.

11. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(x^2+n\right)^{-1}$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$ pero no converge absolutamente para ningún valor de x.

12. Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,(1-x^n)$, se pide:

    (a) Determinar su campo de convergencia A y su suma F y estudiar si la convergencia en A es uniforme o no.

    (b) Probar que la serie converge uniformemente en todo intervalo cerrado contenido en $(-1\,,\,1)$.

SERIES DE POTENCIAS

13. Desarrollar en serie de potencias en un entorno del origen la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ y hallar el radio de convergencia.

14. Expresar en serie de potencias en un entorno del origen la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ y hallar el radio de convergencia.

15. Escribir la función $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-5x+6}$ en serie de potencias en un entorno del origen y hallar el radio de convergencia.

16. Desarrollar las siguientes funciones en serie de potencias en un entorno del origen (i) $f(x) = e^{-2x}$; (ii) $g(x) = tgx$; (iii) $h(x) = arctgx$; (iv) $i(x) = \sqrt{1+senx}$.

17. (a) Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

    (b) Sabiendo que $arcsenx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, deducir el desarrollo en serie de $g(x) = arcsenx$.

18. Mediante la multiplicación de las correspondientes series, obtener los cinco primeros términos del desarrollo en serie de potencias de $f(x) = e^x senx$ en un entorno del origen.

19. Hallar el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n x^n}$$

20. Determinar el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia en los extremos de dicho intervalo:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,2^n} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$$

21. Estudiar la convergencia y calcular las suma de las siguientes series de potencias

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2\,n} \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

22. Deducir los siguientes desarrollos en serie de potencias

$$a)\ sen^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}\,x^{2n}}{(2n)!}\,,\ x \in (-\infty\,,\,+\infty).$$

$$b)\ ln(x^2+3x+2) = ln\,2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ x \in (-1\,,\,1).$$

$$c)\ \frac{ln(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n\,,\ x \in (-1\,,\,1).$$