SEMINARIO DE ANALISIS MATEMATICO. Sucesiones. **Hoja 1**

1. - Demostrar usando la definición:

$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

$b)\ \{1,\ 1.1,\ 1.01,\ 1.001, \ldots\} \longrightarrow 1$

$c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{cos(n\pi) + sen(n\pi)}{n^2} = 0$

$d)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{4n^2-2} = \frac{1}{4}$

$e)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$

$f)\ \{0.9,\ 0.99,\ 0.999, \ldots\} \longrightarrow 1$

$g)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2n} = 0$

2. - Calcular los límites que siguen:

$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-7}{7n^3+2n-1}$

$b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

$c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+5-6+\ldots-2n}{n^2+1}$

$d)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$e)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+pn+q}-\sqrt{n^2+rn+s}$

$f)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+an+b}-n$

$g)\ \lim_{n\to\infty} \frac{4+7+10+\ldots+(3n+1)}{2n^2-1}$

$h)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$

$i)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right)$

$j)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \quad a>0,\ \ b>0$

$k)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n-2}-\frac{n}{2}$

$m)\ \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\right]$

$n)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

$o)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$

$p)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}\right)$

$q)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$r)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$

$s)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+7}{5^n-4}$

$t)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$

3. - Consideremos la sucesión definida por recurrencia:

$$a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}, \quad \text{con } a_1 = 2.$$

Demostrar que es convergente y hallar su límite.

4. - Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ para $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(a_n)^2, \quad \text{con } a_1 = \dfrac{1}{4}.$

5. - Consideremos la sucesión $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$. Demostrar que es convergente y hallar su límite.

6. (a) Sea $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Demostrar que a_n es convergente. Al límite se le llama el número e.

   (b) Sea $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Demostrar que es convergente y que su límite es el número e.

7. - Determinar la relación entre a y b, para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+4}{n+1}\right]^{an+b} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+b}{n+2}\right]^{n+2}$$

8. - Calcular los siguientes límites

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right]^{\dfrac{n^2+5}{n+2}}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{1+3n}{5+3n}}\right]^{\dfrac{n^2}{2n-1}}$

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[2+3n^4\right]^{\dfrac{1}{1+2\ln(n)}}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+n)(n-1)^{n-1}}{n^n}$

$e)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(4n^2+2n+1)}{\ln(n)}$

$g)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(5n^2+7n^3+8n^2+3n-2)}{\ln(6n^3+4n^2+3n-1)}$ $\qquad h)\ \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\cos(3n)$

9. - Probar por la definición que las siguientes sucesiones son de Cauchy

$$a)\ a_n = \frac{2n}{n+5} \qquad b)\ a_n = \frac{1}{n^2} \qquad c)\ a_n = \frac{3n}{n+7}$$

10. - Resolver los siguientes límites

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n}$

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ $\qquad d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln n}{n^2}$

$e)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\ln\left(\dfrac{4}{2}\right)+\ldots+n\ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)}{n}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{2}{1}+\dfrac{3^2}{2}+\ldots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right]$

$g)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} \quad p \in \mathbb{N} \qquad h)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \ldots + \ln n}{n \ln n}$

$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} \qquad j)\ \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln(n+a)}{\ln n}\right]^{n \ln n}$

$k)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + \ldots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$

11. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Calcular:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n^2} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} \ldots + \frac{a_n}{n})}{\ln n}$$

12. - Si $a_n \longrightarrow a$, ¿qué se puede decir de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$?

13. - Hállese el límite de la sucesión definida por inducción: $a_1 > 0$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}.$$

Sugerencia: $|a_{n+1} - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|$.

14. - Se considera la sucesión de números reales definida por:

$$x_1 = 1, \qquad x_n = \frac{x_{n-1}(1 + x_{n-1})}{1 + 2x_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Demostrar que es convergente, y calcular su límite.

15. - Probar que si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty,$$

se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1)b_n}.$$