SEMINARIO DE ANALISIS MATEMATICO. Series. **Hoja 1**

1. - Escribe los cinco primeros términos de cada serie:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n3^n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$$

2. - Expresar como cociente de números enteros los siguientes números decimales:

$$a)\ 0.2222222\ldots \qquad b)\ 0.555555\ldots \qquad c)\ 0.393939\ldots$$

$$d)\ 0.61616161\ldots \qquad e)\ 1.367367 \qquad f)\ 2.377777\ldots$$

3. - Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ es convergente o divergente.

4. - Determinar el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen^4 n}{n^2} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\,e^{-n} \qquad i)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3\ \ln n}$$

$$j)\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^1}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{5^5}+\cdots \quad k)\ 1+\frac{2^2+1}{2^3+1}+\frac{3^2+1}{3^3+1}+\frac{4^2+1}{4^3+1}+\cdots$$

5. - Tratar la convergencia de las series siguientes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n} \qquad i)\ \frac{3}{2\cdot 4}+\frac{3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{7^n} \qquad j)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)(2n-1)} \qquad k)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2n-1}\right]^{2n-1}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\cdot\ln 3\cdots\ln n}{n!} \qquad l)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{2n}{n-1}\right]^{-n}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\ n!} \qquad m)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\,e^{-n^2}$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!} \qquad n)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ n)^n}$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n} \qquad o)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$$

$$h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4\ +\ n^2}} \qquad p)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{2}{3}}$$

6. - Supongamos $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos y $\sum a_n$ una serie convergente. ¿Qué carácter tiene la serie $\sum \dfrac{1}{1+a_n}$?

7. - Demostrar que si la serie de términos positivos $\sum a_n$ es convergente entonces la serie $\sum \dfrac{n+1}{n} a_n$ también es convergente.

8. - Por comparación averiguar si las siguientes series convergen o divergen.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln\, n}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\, n}$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(n\frac{\pi}{2})}{4^n}$; *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+8n+1}{n^2}$

9. - Estudiar la convergencia usando el criterio de Pringsheim

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}; \quad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}; \quad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{n^3+3}.$$

10. - Determinar los valores de x para los que divergen las series indicadas

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$$

11. - Estudiar la convergencia de las series siguientes según los diferentes valores del parámetro λ.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n\, \lambda^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\lambda}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

12. - Aproximar la suma de la serie convergente de manera que el error cometido sea menor que la cantidad indicada.

$$a)\ 1 - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots;\ 10^{-3} \qquad b)\ 1 - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \cdots;\ 10^{-4}$$

13. - Determinar si las series son convergentes y aquéllas que lo sean aproximarlas tantas cifras decimales como indique el número de su apartado.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n-1}}{n\, 3^n} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n-1} \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$$

14. - Sean $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2+1}$ y $b_n = \dfrac{n-2}{2n^2+n+1}$.

    a) Discutir el carácter de las series $\sum a_n$, $\sum b_n$ y $\sum (a_n - b_n)$.

    b) ¿Se trata de convergencia condicionada o incondicionada ?

15. - Distinguir en las siguientes series alternadas, la convergencia absoluta y la condicionada.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8 \cdots (3n-1)}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n^2+2}$$

16. - Estudiar el carácter y sumar

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n; \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}; \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}.$$

17. - Calcular las siguientes sumas:

$$a)\ S = \frac{1}{2}\,3 + \frac{1}{2^2}\,7 + \frac{1}{2^3}\,11 + \cdots; \quad b)\ S = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$$

18. - Sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$ sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$

19. - Estudiar el carácter y sumar si es posible las series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5^n}$$
$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n!} \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+6}{(n+2)!}$$

20. - Sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$, calcular las sumas:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^4} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-6}{n^6}$$

21. - a) Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, ¿qué puede decirse de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n}$?

b) Demostrar que si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de números positivos y convergente, también lo es la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

22. - Sumar la serie: $1+(a+b)+(a^2+ab+b^2)+\cdots+(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n)+\cdots$ siendo $|a|<1,\ \ |b|<1,\ \ a\neq b.$

23. - Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutamente convergente, demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ es condicionalmente convergente. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son condicionalmente convergentes, ¿qué se puede decir de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$?