MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CURSO 2002-2003

PROBLEMAS TEMA 5

1. Aplicar a los siguientes sistemas lineales los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, tomando como vector inicial, $x^{(0)}$, el vector nulo y TOL$=10^{-3}$ en la norma del máximo.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & + & 5x_2 & & & & & = & 6 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 4x_3 & & & = & 25 \\ & - & 4x_2 & + & 8x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & & & - & x_3 & + & 5x_4 & = & -11 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 6 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 6 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & = & 6 \end{array}$$

2. Dado el método iterativo $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d$, $k = 1,\ 2, \ldots$, con $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x^{(k)},\ d \in \mathbb{R}^n$, probar que
$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|C\|^k \|x^{(0)} - x\|, \quad \text{y} \quad \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$
siendo $\|C\| < 1$, $x^{(0)}$ arbitrario y $x = Cx + d$.

3. Aplicar, cuando sea posible, las cotas del ejercicio anterior a las dos primeras iteraciones del método de Jacobi para los sistemas lineales del ejercicio 1, usando la norma del máximo.

4. Estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel para resolver el sistema $Ax = b$ con:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Considerar la resolución del sistema $Ax = b$ por el método iterativo de Jacobi, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

   Se pide:

   (a) Probar que es convergente.

   (b) Obtener las soluciones aproximadas al hacer las 6 primeras iteraciones tomando $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Empleando la norma ∞, calcular los errores absolutos sabiendo que la solución exacta es $x = (1,1,1)^T$. Calcular además la ratio de convergencia.

   (c) Para $m = 6$ dar una cota del error absoluto cometido $\| x^{(6)} - x \|_\infty$ sin hacer uso del conocimiento de la solución exacta del sistema.

(d) ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener una solución aproximada con error relativo menor que 10^{-1}?

6. Idem para el método de Gauss–Seidel.

7. El sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} x = b,$$

donde $x,\ b \in \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$ puede resolverse bajo ciertas condiciones mediante el método iterativo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix} x^{(k)} + \omega b$$

(a) ¿Para qué valores de a es el método convergente para $\omega = 1$?

(b) Para $a = 0.5$, encontrar los valores de $\omega \in \{0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3\}$ que minimizan el radio espectral de la matriz de iteración para este método.