

MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CURSO 2003-2004

PROBLEMAS TEMA 4

1. Probar para los números de condición $K_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a) $\frac{1}{n} K_2(A) \leq K_1(A) \leq n K_2(A)$

(b) $\frac{1}{n} K_\infty(A) \leq K_2(A) \leq n K_\infty(A)$

(c) $\frac{1}{n^2} K_1(A) \leq K_\infty(A) \leq n^2 K_1(A)$

2. Sean las matrices de orden n , $n \geq 3$ y $a \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & \cdots & a+1 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+1 & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a-1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -a & 0 & \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & & \vdots \\ 1 & -1 & & & & 0 \\ a & 0 & \cdots & & 0 & -(a+1) \end{pmatrix}$$

(a) Demostrar que $B = A^{-1}$.

(b) Computar el número de condición $K_\infty(A)$.

(c) Sean $Ax = b$ y $A(x + \delta x) = b + \delta b$ dos sistemas de ecuaciones lineales. Calcular x y δb de manera que se verifique

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = K_\infty(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

3. Sea $\varepsilon > 0$. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Si se emplea la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $\varepsilon = 0.01$, ¿cuántas veces mayor puede ser la perturbación relativa en la solución de $Ax = b$ para una perturbación relativa en b ?

4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular los números de condición $\text{cond}(A)_p$ para $p = 1, 2, \infty$.

- (b) Calcular los autovalores y autovectores de A . Partiendo de ellos, comprobar que la matriz está mal condicionada.
 - (c) Dar una interpretación geométrica del mal condicionamiento.
5. (a) Probar que si A es unitaria entonces $\text{cond}(A)_2 = 1$.
- (b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Probar que $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$.