

MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CURSO 2003-2004

PROBLEMAS TEMA 3

1. Sea A una matriz real simétrica y definida positiva. Probar
 - (a) A es invertible.
 - (b) A^{-1} es definida positiva.
 - (c) Todas las submatrices principales de A son definidas positivas.
 - (d) $\det A > 0$ y, en consecuencia, los determinantes de las submatrices principales de A son todos positivos.
 - (e) Los autovalores de A son todos positivos.
 - (f) Si $A = (a_{ij})$, entonces $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii} > 0$.
2. Probar que el número de productos y cocientes para resolver un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mediante el método de Cholesky es $n^3/6 + 3n^2/2 + n/3$ ($+n$ raíces cuadradas).
3. Resolver aplicando el método de Cholesky el sistema $Ax = b$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Resolver el sistema tridiagonal $Ax = b$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Obtener las fórmulas para la descomposición LU de una matriz A tridiagonal, asumiendo que L tiene "1" en la diagonal principal y se toma $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.
6. Aplicar diferencias finitas centrales de segundo orden, para resolver el problema de valores frontera,

$$L(y) \equiv y''(t) + p(t)y(t) - q(t) = 0, \quad y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad p(t) < 0.$$

Para ello, tómese una partición uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$,

$$t_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, N+1, \quad h = 1/(N+1),$$

la cual divide dicho intervalo en $N+1$ partes. Exíjase además de las condiciones de contorno

$$y_0 \equiv y(t_0) = a, \quad y_{N+1} = y(t_{N+1}) = b,$$

las condiciones $L(y(t_k)) = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$. Luego se aproxima la derivada segunda por la diferencia central correspondiente, i.e.

$$y''(t_k) \doteq h^{-2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}).$$

Comprobar que el sistema lineal resultante es tridiagonal (y diagonal dominante). Escribir un pseudocódigo que resuelva este problema mediante la factorización LU de A . Aplicarlo al caso particular de

$$p(t) \equiv -1, \quad q(t) = t, \quad a = 0, \quad b = 2.$$

Comparar la solución numérica obtenida $\{y_k, k = 1, \dots, N\}$ con la solución exacta

$$y(t) = -t + \frac{t}{e - e^{-1}}(e^t - e^{-t}),$$

sobre los nodos correspondientes $\{t_k, k = 1, \dots, N\}$ al tomar $N = 5, 10, 20$.