

MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS CURSO 2003-2004

PROBLEMAS TEMA 2

1. Probar que el número total de productos que hay que realizar para resolver el sistema lineal $Ax = b$ por el método de Cramer es $(n+1)!(n-1)$, siendo A una matriz cuadrada de orden n , y considerando que cada determinante se calcula como todas las sumas posibles de los productos de los elementos de cada fila y cada columna y con el signo correspondiente a la permutación de los subíndices (definición de determinante de una matriz).
2. Resolver los sistemas siguientes por el método de eliminación de Gauss. Comprobar que $A = LU$, siendo el sistema $Ax = b$:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3. Resolver los sistemas siguientes $Ax = b$ aplicando el método de Gauss con pivotación parcial por filas y total (eligiendo como pivote el mayor elemento):

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

4. Considerar el sistema $Ax = b$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es

$$x = \begin{pmatrix} 26/10 \\ -38/10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ -3,8 \\ -5,0 \end{pmatrix}.$$

- a) Mostrar que cuando se emplea la eliminación gaussiana y los cálculos se hacen con 4 cifras significativas y redondeo, la solución que se obtiene es $(1,335, 0, -5,003)^T$.
- b) Mostrar que utilizando la misma precisión pero ahora con pivotación parcial, la solución que se obtiene es $(2,602, -3,801, -5,003)^T$.

5. Probar que toda matriz A cuadrada y estrictamente diagonal dominante es factorizable LU sin usar pivotación.
6. Probar que toda matriz cuadrada A definida positiva (no necesariamente simétrica) es factorizable LU sin necesidad de pivotación.
7. Probar que toda matriz cuadrada A que verifica

$$x^T A x \neq 0, \quad \forall \|x\|_2 = 1$$

es factorizable LU sin necesidad de pivotación.

8. Hallar la factorización LU de las siguientes matrices A usando eliminación gaussiana y pivotación por filas con "scaling implícito". Indicar cual es la matriz permutación P tal que $LU = PA$. Usar dichas factorizaciones para resolver luego los siguientes sistemas lineales $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Hallar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}$$

y utilizar esta descomposición para resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$, con $b = (3, 1, -15, -107)^T$.

10. a) Sea $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, y sea $\{a_1, \dots, \tilde{a}_k, \dots, a_n\}$ otra base que difiere de la anterior en que el vector a_k ha sido reemplazado por el vector $\tilde{a}_k$. ¿Cómo se pueden determinar las coordenadas con respecto a la segunda base de un vector prefijado, si se conocen sus coordenadas respecto a la primera base?
- b) Supongamos que se quiere resolver un sistema lineal de ecuaciones, pero después de efectuar la factorización LU , se descubre que una de las columnas de la matriz original A es errónea. ¿Cómo se puede usar la descomposición para computar la solución correcta? Formular el correspondiente algoritmo y utilizarlo para resolver el sistema del problema anterior si la primera columna de A se reemplaza por $(0, 0, 6, 36)^T$.
11. Resolver el sistema $Ax = b$ siguiente por el método de Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

12. Calcular aplicando el método de Gauss–Jordan la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. a) Probar que el número de operaciones $(\times, \div)$ para resolver un sistema de orden n por el método de Gauss–Jordan es $n^3/2 + n^2 - n/2$.
- b) Dada A matriz no singular de orden $n \times n$, probar que el método de Gauss–Jordan sólo necesita de n registros de almacenamiento adicionales de los n^2 que requiere A , para obtener A^{-1} .
14. Sea A una matriz no singular. Supongamos que A tiene dos descomposiciones de la forma $A = L_1U_1$, $A = L_2U_2$, siendo L_i , $i = 1, 2$, triangulares inferiores y U_i , $i = 1, 2$, triangulares superiores. Estudiar la relación entre las matrices L_i y U_i .

15. Comprobar que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

no es factorizable en la forma LU . A continuación formar una permutación de sus filas que sí dé lugar a una matriz factorizable.