

Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 1. Conceptos del Análisis Numérico

1. VELOCIDAD DE CONVERGENCIA. Sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

si tratamos de obtener una aproximación del número e podríamos usar la sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ como aproximación. Calcular x_1 , x_{10} , x_{30} , x_{50} , x_{1000} y estimar el error cometido en cada caso.

2. Demostrar que el siguiente algoritmo

$$\begin{cases} x_1 &= 2 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

proporciona una sucesión $\{x_n\}$ que converge a $\sqrt{2}$. Calcula x_1 , x_2 , x_3 y x_4 , estima el error que se comete en cada caso. ¿Es más rápido este algoritmo que el del ejercicio anterior?

3. INESTABILIDAD NUMÉRICA OCASIONADA POR ERRORES DE REDONDEO. Pruébese que la sucesión

$$y_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

verifica la siguiente ecuación en recurrencia

$$y_{n+1} + (n+1)y_n = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad *$$

con dato inicial $y_0 = \frac{1}{e}(e-1)$.

- (a) Probar que la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es positiva, monótona decreciente y que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.
- (b) Usando la fórmula anterior, computar los números $y_1, y_2, \dots, y_{10}$. Interpretar los resultados en función de las conclusiones del apartado anterior. Justificar los resultados.
- (c) Como consecuencia de los resultados del primer apartado parece natural suponer que para algún n $y_n \equiv 0$ y utilizar la fórmula (*) para obtener de forma recursiva hacia atrás una estimación de y_0 . Efectúese para $n = 5, 10$ dicha suposición. Justificar los resultados.

4. Obtener un algoritmo para calcular las integrales

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+1} dx$$

¿ Es estable ?. Modifíquese la integral para obtener algoritmos con diversos tipos de estabilidad.

5. ERROR DE TRUNCAMIENTO. Calcular los valores de la función $y = f(x)$ en los puntos $x_j = j \cdot h$, siendo $h = \frac{1}{n}$; $j = 0, 1, 2, \dots, n$ siendo $f(x)$ la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y^2 + 1 \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

con $y(0) = 0$.

Indicación: Aproximar $f'(a)$ por $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Compruébese que $y(x) = \tan(x)$ es la solución exacta de dicha ecuación. Hallese la diferencia entre los valores exactos y la sucesión computada en los puntos x_j ; $j = 1, 2, \dots, n$ cuando la $n = 4$ y para $n = 8$, contrastar los resultados para cada valor de n .

Nota : ESTE MÉTODO RECIBE EL NOMBRE DE MÉTODO DE EULER

6. Integrar numéricamente la ecuación diferencial

$$y' = y$$

con valor inicial $y(0) = 1$, en el intervalo $[0, 0.4]$. Usando el método de Euler.

(a) Con paso de longitud $h = 0.2$.

(b) Con $h = 0.1$. En ambos caso estimar los errores cometidos sabiendo que la solución exacta es e^x . Contrastar los resultados obtenidos en cada caso.

7. Sabemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente y es igual a $\ln(2)$, es decir, Si definimos

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ a la suma parcial de dicha serie, entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln(2)$$

Estimar el error de truncamiento al considerar S_{10} como aproximación de $\ln(2)$.

8. Hallar una estimación de $\sin(20^\circ 30')$ con un error menor de 10^{-5} .