Métodos Numéricos I

Curso 2003-2004

Colección de Problemas

Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 1

1. Determinase que la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una única raíz α en $I = [1; 2]$. Estime teóricamente cuántas iteraciones serán necesarias utilizando el método de bisección, para hallar un valor aproximado de α con una precisión de 10^{-4}. Determine numéricamente este valor (una aproximación de α con un error menor que 10^{-4}).

2. Encuentrese, utilizando el método de bisección, una aproximación de $\sqrt[3]{25}$ con una precisión de 10^{-4}.

3. Demostrar que cada una de las funciones siguientes tiene un punto fijo en x, precisamente cuando $f(x) = 0$ para $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

   (a) $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$ (c) $g_3(x) = \left(\dfrac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2}$

   (b) $g_2(x) = \left(\dfrac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}$ (d) $g_4(x) = \dfrac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1}$

   En cada una de las funciones dadas, si es posible, efectuar 4 iteraciones tomando

   $p_o = 1$ y $p_{n+1} = g(p_n)$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.

   ¿Cuál de estas funciones dá la mejor aproximación a la solución?

4. Dar ejemplos de funciones que **no** tienen punto fijo aunque poseen las siguientes características:

   (a) $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ (c) $f : A \longrightarrow A$ y es continua, con $A = [0; 1] \cup [2; 3]$

   (b) $f :]0; 1[\longrightarrow]0; 1[$ y es continua. (d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y es continua.

5. Se define la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ del modo siguiente:

   $$x_{n+1} = x_n(2 - a \cdot x_n) \ ; x_0 > 0 \ \ a > 0.$$

   (a) Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite.

   (b) Comprobar que se satisface la siguiente igualdad: $Rel(x_{n+1}) = [Rel(x_n)]^2$.

Métodos Numéricos I

Curso 2003-2004

Colección de Problemas

Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 2

6. Se quiere resolver la ecuación $x + \ln(x) = 0$, cuya raíz es $\alpha \approx 0.5$, mediante iteraciones y se quiere escoger de entre los siguientes esquemas iterativos:

$$(I)\ \ x_{n+1} = -\ln(x_n) \qquad (II)\ \ x_{n+1} = e^{-x_n} \qquad (III)\ \ x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$$

   (a) ¿ Cuál de las fórmulas se puede usar ?.

   (b) ¿ Cuál se debería usar ?.

   (c) Dar una fórmula que mejore los resultados anteriores.

7. Demostrar que si $g(x) = 2^{-x}$, entonces la ecuación $g(x) = x$ tiene una única raíz s en $[1/3; 1]$. Usar la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación al punto s con una precisión de 10^{-4}. Estimar el número de iteraciones requeridas y comparar esta estimación teórica con el número de iteraciones realmente necesario.

8. Demostrar que $g(x) = \pi + 0,5 \sin x$ tiene un único punto fijo en $[0; 2\pi]$. Usar la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación a dicho punto, con una precisión de 10^{-2}.

9. Usando iteración de punto fijo, determinar la raíz de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ que pertenece al intervalo $[1, 2]$. Obténgase una aproximación a la raíz exacta con un error que no exceda al valor 10^{-2}.

10. Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ derivable tal que $-1 < g'(x) < 0 \forall x \in [a, b]$. Si $x_0 < p$ donde $g(p) = p$, demostrar que la sucesión de iterantes satisface:

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < p < \cdots < x_5 < x_3 < x_1$$

11. Usar el procedimiento de iteración de punto fijo para encontrar una aproximación a $\sqrt{3}$ que sea exacta a 10^{-4}.

12. Si en una calculadora digital se introduce un número cualquiera y después se presiona repetidamente la tecla que corresponde a la función coseno, ¿qué número aparecerá? Justifique teóricamente lo que ocurre.

Métodos Numéricos I

Curso 2003-2004

Colección de Problemas

Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 3

13. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determinar un intervalo $[a; b]$ en el que la iteración de punto fijo converja. Estimar el número de iteraciones que son necesarias para obtener aproximaciones con una precisión de 10^{-5}.

    (a) $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$ (b) $x = \sqrt{\dfrac{1}{3}e^x}$ (c) $x = 5^{-x}$

    (d) $x = 6^{-x}$ (e) $x = 1,75 + \dfrac{4x-7}{x-2}$ (f) $x = \dfrac{5}{x^2+2}$

    .

14. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos determinados por las siguientes funciones, en los intervalos que se indican.

    (a) $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$ (b) $g(x) = \dfrac{4x-3}{x}, \quad x \in \mathbb{R}$

    (c) $g(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 9}{12}, \quad x \in \mathbb{R}$

    .

15. Demostrar que el esquema iterativo $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + x_n^2}$ converge para cualquier valor inicial x_0 . Deducir el orden de convergencia.

16. Dada la ecuación: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ que admite por raíz $\alpha = 1$, la escribiremos en la forma:

    $$x = \varphi_1(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2}{5}$$

    ó

    $$x = \varphi_2(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2,$$

    encontrar el orden de convergencia de cada uno de los métodos iterativos a que dan lugar.

Métodos Numéricos I

Curso 2003-2004

Colección de Problemas

Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 4

17. ¿Cuáles de las siguientes iteraciones convergen al punto α indicado, suponiendo que las aproximaciones iniciales x_o están próximas a dicho punto fijo α?. Determinar el orden de convergencia según el caso.

(a) $x_{n+1} = -16 + 6x_n + \dfrac{12}{x_n}, \quad \alpha = 2.$ (b) $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{x_n^2}, \quad \alpha = \sqrt[3]{3}.$

(c) $x_{n+1} = \dfrac{12}{1+x_n}, \quad \alpha = 3.$

18. Dada $g(x) = x^2 - 2x + 2$. ¿ Para qué valores de x_0 converge $x_{n+1} = g(x_n)$ a una raíz de $g(x) = x$? ¿ Cuál es el orden de convergencia?. Hacer un dibujo de la situación.

19. Demostrar que cada una de las siguientes funciones tiene un punto fijo en p cuando $f(p) = 0$, donde $f(x) = x^2 - a$.

(a) $h_1(x) = x^2 + x - a$ (c) $h_3(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$

(b) $h_2(x) = \dfrac{a}{x}$ (*d*) $h_4(x) = x + c(x^2 - a)$ .Determinar c para que haya convergencia. ¡ Cuál es la mejor ?

20. Estudiar qué valores deben tomar a y b en $g(x) = \dfrac{x^3 + ax}{bx^2 + 3}$ para que el método $x_{n+1} = g(x_n)$ proporcione $\sqrt{3}$, con convergencia local al menos cuadrática.

21. Determinar p, q y r de manera que el orden de convergencia del método iterativo:

$$x_{n+1} = px_n + \frac{q \cdot a}{x_n^2} + \frac{r \cdot a^2}{x_n^5}$$

para $\sqrt[3]{a}$ sea lo más alto posible. Para esta elección de p, q, y r indicar cómo depende el error en x_{n+1} con el error en x_n.

Métodos Numéricos I

Curso 2003-2004

Colección de Problemas

Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 5

22. Para las siguientes sucesiones $\{x_n\}$ linealmente convergentes, usar el método de Δ^2 **de Aitken** para generar $\{\hat{x}_n\}$ hasta que $|\hat{x}_n - x| \leq 5 \cdot 10^{-4}$, donde x es el correspondiente límite. Comparar los resultados con los de la propia sucesión $\{x_n\}$.

    a) $x_n = e^{-n} \quad , \quad n \geq 1$ *b*) $x_n = \frac{n!}{n^n} \quad , \quad n \geq 1$ *c*) $x_n = \frac{1}{n^n} \quad , \quad n \geq 1$

23. En cada una de las siguientes ecuaciones, utilizando una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ que converja linealmente a la solución α contenida en el intervalo que en cada caso se indica, determine el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación de α con una precisión de 10^{-5}. Aplique posteriormente el proceso de extrapolación conocido como Δ^2 **de Aitken** para "acelerar la convergencia" y destaque su ventaja, indicando la cantidad de iteraciones con las que ahora se logra la misma precisión que se había prefijado ($\epsilon < 10^{-5}$).

$$a) \quad x^3 - x - 1 = 0 \quad \text{en} \quad I = [1;2] \quad b) \quad x - 2^{-x} = 0 \quad \text{en} \quad I = [0;1]$$

$$c) \quad e^x = x^2 - 3x + 2 \quad \text{en} \quad I = [0;1]$$

24. Se dice que un método iterativo $\{x_n\}$ converge de forma superlineal a α, si existe una sucesión $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $n > 0$ se cumple:

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c_n |\alpha - x_n| \qquad \text{con} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Demostrar que en tal caso se tiene: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - x_n|}{|x_{n+1} - x_n|} = 1,$

lo que significa que, para n "suficientemente grande", se puede usar la estimación

$$|\alpha - x_n| \doteq |x_{n+1} - x_n|,$$

para dar "una buena aproximación" de α.