Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aritmética del Computador

1. Acotar x_E sabiendo que $x_A = 35,56$ es una aproximación con una magnitud del error absoluto menor que una centésima.

2. Determinar cual de las dos medidas siguientes tiene mayor precisión:

$$(a)\ \frac{25}{6} \cong 4.1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} \cong 0.333\,, \quad (b)\ \frac{1}{9} \cong 0.1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} = 0.33\,, \quad (c)\ \frac{15}{7} \cong 2.14 \quad \text{y} \quad \frac{1}{9} \cong 0.11\,,$$

$$(d)\ \frac{6}{7} \cong 0.86 \quad \text{y} \quad \pi \cong \frac{22}{7}\,, \qquad (e)\ \pi \cong 3.142 \quad \text{y} \quad \sqrt{10} \cong 3.1623\,.$$

3. Acotar A sabiendo que $\tilde{A} = 43,56$ es aproximación con un error relativo a lo sumo del 1%.

4. Estimar el error absoluto de los siguientes números aproximados a partir de su error relativo:

   (a) $x_A = 2,52$ $\quad |Rel(x_A)1 = 0.7\%$ $\qquad (b)$ $y_A = 0.986$ $\quad |Rel(y_A)| = 0.1$

   (c) $z_A = 46.75$ $\quad |Rel(z_A)| = 1\%$ $\qquad (d)$ $x_A = 199$ $\quad |Rel(x_A)| = 0.01.$

5. Hallar el error relativo de las siguientes aproximaciones considerando como valor verdadero el obtenido por una calculadora.

   (a) $\frac{1}{9} \approx 0,1$ $\qquad (b)$ $\pi^2 \approx 9,87$

   (c) $\frac{25}{31} \approx 0,75$ $\qquad (d)$ $25,657341 \approx 25,65$

6. Estimar el error relativo de las siguientes aproximaciones (x_A), sabiendo que la magnitud del error absoluto E_A está acotada por la cantidad indicada:

   (a) $x_A = 25,35 \ ; \ |E_A| \leq 1.2$ $\qquad (b)$ $x_A = 47,453 \ ; \ |E_A| \leq 0,024$

   (c) $x_A = -3,2117210 \ ; \ |E_A| \leq 0,0037$ $\qquad (d)$ $x_A = 0,0234 \ ; \ |E_A| \leq 0.01$

7. Encontrar el número de cifras significativas de las siguientes aproximaciones (x_A) a los valores exactos (x_E):

   (a) $x_A = 451,023 \quad x_E = 451.01$ $\qquad$ (b) $x_A = -0,045113 \quad x_E = -0,04518$

   (c) $x_A = 0,333 \quad x_E = \frac{1}{3}$ $\qquad$ (d) $x_A = 3,1416 \quad x_E = \pi$

   (e) $x_A = 0,0067 \quad x_E = e^{-5}$ $\qquad$ (f) $x_A = -25,607 \quad x_E = -25,60653.$

8. Encontrar el número de cifras significativas de las siguientes aproximaciones (x_A) a los valores exactos (x_E):

   (a) $x_A = 0.101 \quad x_E = 0.099$ (b) $x_A = 0,099 \quad x_E = 0,101$

   (c) $x_A = 1,033 \quad x_E = 0,99$ (d) $x_A = .9869 \cdot 10 \quad x_E = \pi^2$

   (e) $x_A = -0,0094 \quad x_E = -0,01$ (f) $x_A = -0.01 \quad x_E = -0.0094$.

9. Dar cotas de los errores absolutos y relativos de los siguientes números aproximados, si todos los dígitos son significativos:

   (a) $a = 0,7538$ (b) $b = -17,354$ (c) $c = 0,00043$

10. Sabiendo que $\hat{A} = 1,7342$ es una aproximación con una fiabilidad menor de una diez milésima, se pide:

    (a) Acotar el error absoluto.
    (b) El intervalo donde se encuentra A.
    (c) Encontrar las cifras significativas de $\hat{A}$.

11. Si se sabe que un número A se encuentra en el intervalo $[23.07,\ 23.10]$, escoger una aproximación y estimar el error absoluto. Calcular el error relativo.

12. Probar que el error relativo en la medida de una magnitud no depende del sistema de unidades elegido. En otras palabras, que $Rel(K \cdot x_A) = Rel(x_A)$.

13. Escribir en forma normalizada los siguientes números dados en base 10.

$$x = 1234 \quad ; \qquad x = 12.36 \quad ; \qquad x = .01287 \quad ; \qquad x = \frac{28}{3}$$

14. Sea $B \in I\!N$; $B \geq 2$ y $x = B(.a_1\ a_2\ a_3\ \ldots a_n\ \ldots)_B$ con

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$$

    calcular x en base 10 . Aplicar el caso $B = 2$.

15. Convertir los siguientes decimales a sus equivalentes binarios ($B = 2$).

    (a) $0,8125$ (b) $12,0625$ (c) $0,1$

    (d) $0,2$ (e) $0,4$ (f) $\frac{1}{7} = 0,142857142857...$

16. Convertir a su equivalente octal ($B = 8$), los siguientes números.

    (a) $26,109375$ (b) $2^4\ (.101100101)_2$

17. Convertir los siguientes números a sus equivalentes decimales ($B = 10$).

(a) $(10101.101)_2$	(b) $(2A3.FF)_{16}$
(c) $(.1010101010...)_2$	(d) $(.AAAA...)_{16}$
(e) $(.00011001100110011...)_2$	(f) $(\underbrace{111\ldots1}_{n\text{-veces}})_2$

18. Sea $x \in I\!N$; y sea $B \geq 2 : B \in I\!N$. Probar que $\exists N \in I\!N$:

$$x = B^N \sum_{j=1}^{N} a_j \, B^{-j} \quad ; \quad a_j \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ B-1\}$$

19. Convertir los siguientes enteros a sus equivalentes binarios ($B = 2$).

(a) 49 $\quad$ (b) 127 $\quad$ (c) 129

20. Sea $n \in I\!N$ y sea $B \in I\!N$; $B \geq 2$. Supongamos que $n = (a_1\ a_2 \ldots a_m)_B$. Probar que $n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$ es múltiplo de $B - 1$.

21. Convertir a su equivalente hexadecimal ($B = 16$), el número $231,7890625$ y dar la respuesta usando un redondeo a tres dígitos.

22. Representar los siguientes números usando **corte** o **redondeo** (según se indique), a la cantidad de dígitos que se señala en cada caso.

(i) $(.1010101010...)_2$ corte a 5 dígitos, $\quad$ (ii) $16^3\ (.2A3FF)_{16}$ redondeo a 3 dígitos,

(iii) $0,142857142857...$ corte a 4 dígitos, $\quad$ (iv) $(1011.00101)_2$ redondeo a 6 dígitos.

23. ¿ Cuántas cifras significativas tienen los números de máquina.

24. Determinar la cantidad de cifras significativas que tiene el número $x = 2.3752$ si el error relativo del mismo es de 0.01.

25. Sabiendo que $\hat{A} = 14,273$ es una aproximación de A con una cota del error relativo del orden de $5 \cdot 10^{-3}$, se pide:

   (a) Estimar entre qué valores está A.
   (b) Estimar el error absoluto.
   (c) ¿ Es posible obtener una aproximación de A con dos cifras significativas ?. Justifica la respuesta.
   (d) Acotar el error relativo y absoluto de A^2

26. Encontrar las cifras significativas de $a = 705,1978$ sabiendo que el error absoluto está acotado por $0,3$. Redondear hasta dejar sólo cifras significativas.

27. ¿ Cuántos dígitos deben tomarse en el cálculo de $x = \sqrt{20}$ de forma que el error relativo de la aproximación obtenida no exceda de 0.001?.

28. ¿ Cuántos dígitos serán necesarios en cada uno de los factores para que $\sqrt{3} \cdot \pi$ se obtenga con un error de 1 milésima?.

29. ¿ Cuántos dígitos deben tomarse en los factores de la operación $\frac{7}{9}$ para que su error relativo en la aproximación obtenida no exceda de 0.03% ?.

30. Si a posee n cifras significativas, cuántas tiene $\dfrac{a}{10}$.

31. Calcúlese $Rel\ (\sqrt{x_A})$ en función de $Rel\ (x_A)$. Hacer lo mismo con $Rel(\sqrt[m]{x_A})$.

32. El lado de un cuadrado mide $l = 36.5cm$ con un error de $1mm$. Estimar el área del cuadrado, su error absoluto, error relativo y el número de cifras significativas.

33. Estimar la longitud del lado de un cuadrado de área aproximada 16.45 cm^2 con una precisión de 0,01 cm.

34. Calcular el error relativo de la siguiente operación: $P = \frac{A \cdot B}{C}$ si, $A = 3.1528 \pm 0.004$, $B = 3142.7 \pm 0.4$, $C = 15 \pm 0.003$.

35. Calcular el error relativo de la siguiente operación: $P = \sqrt[5]{\frac{AB}{C}}$, si $A = 32.15 \pm 0.008$, $B = 15.2373 \pm 0.007$, $C = 47.20 \pm 0.0001$.

36. Calcular el valor numérico de los siguientes cocientes. En el resultado, retener todas las c.s.v. y un dígito más de reserva. Todos los números tienen sus dígitos válidos.

    (a) $y = \dfrac{3.07 \cdot 326}{36.4 \cdot 323}$, (b) $y = \dfrac{36.245 \cdot 85}{975 \cdot 642}$, (c) $y = \dfrac{37.2 + 458.67}{36.5 \cdot 246}$, (d) $y = \dfrac{96.891 - 4.25}{33.3 + 0.426}$.

37. Calcular con cuántas cifras hay que tomar π y e en $R = \frac{\pi e}{1.4142}$ para obtener el resultado con error absoluto menor que una centésima si el valor aproximado del denominador tiene todas sus cifras válidas. Dar R sólo con c.v. y un dígito más de reserva.

38. Calcular con cuántas cifras válidas hay que tomar π y e para obtener $\sqrt{\frac{\pi \cdot e}{\pi + e}}$ con error absoluto menor que una milésima.

39. El período de oscilación de un péndulo de longitud l es igual a

    $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

    donde g es la aceleración de la gravedad. Se desea que el péndulo efectúe una batida cada 2 segundos, con un error de 5%. ¿ Con qué exactitud debe medirse la longitud de un péndulo?, ¿ Con qué exactitud deben tomarse los valores de π y de g?. AYUDA: Despejar el valor de l que hace $T = 2$.

40. Hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 40x + 1 = 0$, usando la aproximación $\sqrt{399} = 19.975$ correctamente redondeada. ¿ Cuántos dígitos significativos tiene cada una ? ¿ Cómo se puede evitar la pérdida de significancia ?

41. Usando el polinomio de Taylor como aproximación a las siguientes funciones intenta evitar la pérdida de significancia en la evaluación de las siguientes funciones cerca del cero, comprobando dicha pérdida suponiendo que disponemos de una calculadora que sólo trabaja con 5 dígitos significativos :

$$a)\ \ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \qquad\qquad b)\ \ \frac{\ln(1-x) + xe^{\frac{x}{2}}}{x^3}.$$

En ambos casos, ¿ Qué ocurre con $\lim_{x\to 0} f(x)$?.

42. Suponiendo que tenemos una calculadora que sólo puede trabajar con cuatro dígitos significativos, evaluar los siguientes polinomios cuando x toma valores próximos a 1 y estudia su comportamiento:

    (a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

    (b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

    ¿ Qué ocurre en esos puntos con $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$?.

43. Si suponemos que tenemos la misma calculadora que en el problema anterior, estudiar la pérdida de significancia al evaluar las siguientes funciones en los puntos que se indican. Además, buscar alguna forma alternativa de evaluarlas para evitar la pérdida:

    (a) $\ln(x+1) - \ln(x)$, para x grande .

    (b) $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, x próximos al 0.

    (c) $\sqrt[3]{1+x} - 1$, x próximos al 0 .

44. Acotar el error relativo del número $x_A = 0,937$, asumiendo que tiene tres dígitos significativos con respecto a x_E. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$, acotar los errores absoluto y relativo al aproximar $f(x_E)$ por $f(x_A)$.