TEMA V: POLINOMIOS ORTOGONALES

1. Introducción

Un sistema de funciones reales $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ se dice ortogonal respecto a la función peso $\rho(x)$ en el intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) \rho(x) dx = 0$$

para todo $m \neq n$, donde $\rho(x)$ es una función no negativa fija que no depende de m y n. Por ejemplo:

El sistema de funciones $cos(nx)$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ es ortogonal respecto a la función peso $\rho(x) = 1$ en el intervalo $[0, \pi]$, ya que para $m \neq n$

$$\int_0^\pi cos(mx)cos(nx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \{cos[(m+n)x] + cos[(m-n)x]\}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \left[\frac{1}{m+n} sen[(m+n)x]\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{m-n} sen[(m-n)x]\right]_0^\pi \right\} = 0$$

Una clase importante de sistemas ortogonales de funciones, están constituidas por familias de polinomios $p_n(x)$ donde $n = 0, 1, 2, 3...$ representa el grado del mismo. En este tema estudiaremos algunas de estas familias, tales como: polinomios de Legendre, polinomios de Hermite y polinomios de Laguerre.

2. Polinomios ortogonales. Generalidades

Sea $\rho(x)$ una función real definida e integrable sobre $[a, b]$; $\rho(x)$ será positiva o nula y continua a trozos. Supondremos que $\rho(x)$ no es siempre nula. En el caso de un intevalo no acotado asumiremos que todas las integrales $\int_a^b x^m \rho(x) dx$ $(m \in \mathbb{N})$ convergen.

Dados los polinomios reales $P(x)$ y $Q(x)$ usaremos la notación

$$< P|Q >= \int_a^b P(x)Q(x)\rho(x)dx$$

Nótese que el producto $< P|Q >$ posee todas las propiedades de un producto escalar: es conmutativo, distributivo respecto a la suma y

$$< P|P >= \begin{cases} \displaystyle\int_a^b P^2(x)\rho(x)dx > 0 & si\ P(x) \neq 0 \\ \\ 0 & si\ P(x) = 0 \end{cases}$$

Se dice que P y Q son ortogonales, respecto a la función peso $\rho(x)$, en $[a, b]$ si $< P|Q >= 0$. La familia de polinomios $P_n(x)$, donde n representa el grado, se llama familia o conjunto de polinomios ortogonales respecto a $\rho(x)$ en $[a, b]$ si $< P_n|P_m >= 0$ para $n \neq m$. Se dice que la familia de los $P_n(x)$ es ortonormal cuando

$$< P_n|P_m >= \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ 1 & si\ n = m \end{cases}$$

Recordemos que si $P_n(x)$ es una familia de polinomios de grado n, no necesariamente ortogonales, todo polinomio de grado m puede escribirse:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(x)$$

donde los c_n son coeficientes numéricos que dependen de n y $P(x)$.

Teorema Es posible construir una familia de polinomios ortogonales $P_n(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ respecto a una función peso $\rho(x)$, arbitraria, definida sobre este intervalo.
<u>Demostración:</u> En efecto, la familia x^n $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ es linealmente independiente sobre $[a, b]$ y el proceso de ortogonalización de Schmidt garantiza el teorema.

Teorema Una condición necesaria y suficiente para que la familia de polinomios $P_n(x)$ sea ortogonal es que:

$$\int_a^b x^k P_n(x)\rho(x)dx = 0 \qquad (\forall n, k\ /\ 0 \leq k < n)$$

<u>Demostración:</u>

"$\Rightarrow$" Si $\displaystyle\int_a^b x^k P_n(x)\rho(x)dx = 0$ $(\forall n, k\ /0 \leq k < n)$ Dados $P_m(x)$ y $P_n(x)$ con $n \neq m$ y supongamos que $m < n$. $P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = \sum_{k=0}^{m} \left[a_k \int_a^b x^k P_n(x)\rho(x)dx \right] = \sum_{k=0}^{m} a_k.0 = 0$$

"$\Leftarrow$" Si $\displaystyle\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = 0 \quad (n \neq m)$, entonces para todo $k < n$ escribimos $x^k = \displaystyle\sum_{m=0}^{k} a_m P_m(x)$ y por tanto

$$\int_a^b x^k P_n(x)\rho(x)dx = \sum_{m=0}^{k} \left[a_m \int_a^b P_m(x)P_n(x)\rho(x)dx \right] = 0$$

ya que $m \neq n$ $(m = 0, 1, 2, 3, ..., k)$

Nota: Si $P(x)$ es un polinomio de grado m, y $P_n(x)$ una familia de polinomios ortogonales

$$P(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(x) \qquad con \;\; c_n = \frac{< P_n|P >}{< P_n|P_n >}$$

Teorema Si $P_n(x)$ es una familia de polinomios ortogonales, existen tres números A_n, B_n y C_n tales que para $n \geq 1$:

$$xP_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x)$$

y $A_n.C_n \neq 0$

<u>Demostración:</u> El polinomio $xP_n(x)$ de grado $n+1$ puede escribirse de la forma:

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k(x)$$

con

$$\alpha_k = \frac{< P_k|xP_n >}{< P_k|P_k >}$$

pero como $< P_k|xP_n > = < P_n|xP_k > = 0$ si $k > n+1$ y $n > k+1$, es decir, si $k < n-1$ y $k > n+1$. Luego, sólo los coeficientes α_{n-1}, α_n y α_{n+1} intervienen en el desarrollo.

Teorema Consideremos una familia de polinomios, $P_n(x)$, ortogonales respecto a la función peso $\rho(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces, los ceros de los polinomios $P_n(x)$ son reales, simples y están contenidos en el intervalo (a, b).

<u>Demostración:</u> Como $\displaystyle\int_a^b P_n(x)\rho(x)dx = 0$ para $n > 0$ y $\rho(x) \geq 0$ sobre (a, b), $P_n(x)$ debe cambiar, al menos una vez, de signo sobre (a, b). Sean $x_1, x_2, ..., x_p$ los puntos de (a, b) en los que $P_n(x)$ cambia de signo. Se tiene: $1 \leq p \leq n$. Consideremos el polinomio

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - x_i)$$

el polinomio $P_n(x).Q(x)$ tiene signo constante sobre (a, b), luego:

$$\int_a^b P_n(x)Q(x)\rho(x)dx \neq 0$$

pero esto es absurdo si $p < n$, luego debe ser $p = n$. Por lo tanto el polinomio $P_n(x)$ cambia n veces de signo sobre (a, b).

2..1 Series de polinomios ortogonales

Definición Se llama espacio L^2_ρ al conjunto de funciones reales $f(x)$ tales que las integrales $\int_a^b |f(x)|\rho(x)dx$ y $\int_a^b |f(x)|^2\rho(x)dx$ existen.

No es complicado comprobar que L^2_ρ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, donde el único punto delicado estaría en comprobar que $\forall f, g \in L^2_\rho : \ f + g \in L^2_\rho$, pero la demostración se salvaría usando la desigualdad de Schwarz:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx\right| \leq \left[\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} . \left[\int_a^b g^2(x)\rho(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Se puede definir en L^2_ρ el producto escalar

$$< f|g >= \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

el cual define a su vez una norma

$$||f|| = [< f|f >]^{\frac{1}{2}}$$

lo que nos permite hablar de distancia entre vectores de L^2_ρ

$$d(f, g) = ||f - g|| = [< f - g|f - g >]^{\frac{1}{2}}$$

Pretendemos, ahora, aproximar funciones de L^2_ρ por polinomios. Sea $P_n(x)$ una familia de polinomios ortonormales respecto a $\rho(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y $f(x) \in L^2_\rho$. Queremos representar $f(x)$ por un polinomio $S_n(x)$ de grado n tal que la norma de $f - S_n$ sea mínima.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

$$< f - S_n|f - S_n >= \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 \rho(x)dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx - 2\int_a^b f(x)S_n(x)\rho(x)dx + \int_a^b S_n^2(x)\rho(x)dx =$$

$$=< f|f > -2\sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b f(x)P_k(x)\rho(x)dx + \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

hagamos: $a_k = \displaystyle\int_a^b f(x)P_k(x)\rho(x)dx$

Los números a_k se llaman coeficientes de Fourier de $f(x)$ respecto al sistema ortonormal $P_k(x)$.

$$< f - S_n|f - S_n >=< f|f > -2\sum_{k=0}^{n} c_k a_k + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 =< f|f > -\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2$$

La distancia de $f(x)$ a $S_n(x)$ será mínima si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 = 0$, es decir, $a_k = c_k$ $(k = 0, 1, 2, 3, ...)$. Por lo que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$.

Teorema La integral

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) \right]^2 \rho(x)dx$$

es mínima cuando los coeficientes c_k son iguales a los coeficientes de Fourier a_k de $f(x)$, relativos al sistema ortonormal $P_k(x)$.

$$a_k = \int_a^b f(x)P_k(x)\rho(x)dx$$

en estas condiciones:

$$< f - S_n|f - S_n >=< f|f > - < S_n|S_n \ > \geq 0$$

y

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq < f|f >$$

esta última desigualdad se conoce como desigualdad de Bessel y de ella se deduce que $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Definición Se dice que una familia infinita de polinomios ortogonales es total si $\forall f \in L_\rho^2$ la desigualdad de Bessel se reduce a una igualdad, es decir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx$$

Teorema Toda familia de polinomios ortogonales sobre un intervalo finito es total sobre L_ρ^2.

Definición Sea una función $G(x,t)$ desarrollable en serie de potencias de t en un cierto dominio $\mathcal{D}$.

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) t^n$$

a $G(x,t)$ se le llama función generatriz de las funciones $\phi_n(x)$

Teorema La condición necesaria y suficiente para que los polinomios $P_n(x)$ definidos por el desarrollo

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

sean ortogonales sobre el intervalo $[a,b]$ respecto de la función peso $\rho(x)$ es que la integral

$$I = \int_a^b G(x,t)G(x,t')\rho(x)dx$$

no dependa más que del producto tt'.

3. Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre están definidos por la fórmula de Rodrigues, tal y como sigue:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ , \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1); \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x); ...$$

La expresión general del polinomio de Legendre de grado n se obtiene a partir de la igualdad

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}$$

por lo que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

donde $[\frac{n}{2}]$ representa la parte entera de $\frac{n}{2}$.

Haciendo uso de técnicas de variable compleja, se puede demostrar que la función

$$W(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

es la función generatriz de los polinomios de Legendre, es decir,

$$W(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

este desarrollo tiene validez para $|t|$ suficientemente pequeño, en realidad $|t| < r$ siendo $r = min\{|r_1|, |r_2|\}$ y r_1 y r_2 raíces de la ecuación $1-2xt+t^2 = 0$

Nota: En la práctica se toma para $x \in [-1,1]$, $r = 1$

La función generatriz $W(x,t)$ nos permite demostrar con facilidad las siguientes propiedades de los polinomios de Legendre:

$$\begin{array}{ll} P_n(1) = 1; & P_n(-1) = (-1)^n \\ P_{2n+1}(0) = 0; & P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3....(2n-1)}{2.4....2n} \end{array}$$

Además teniendo en cuenta que

$$(1 - 2xt + t^2)\frac{\partial W}{\partial t} + (t - x)W = 0$$

escribimos

$$(1 - 2xt + t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t - x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

igualando a cero el coeficiente de t^n, obtenemos

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0; \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3.1}$$

De manera similar y usando que

$$(1 - 2xt + t^2)\frac{\partial W}{\partial x} - tW = 0$$

se tiene

$$(1 - 2xt + t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = 0$$

lo que implica

$$P_{n+1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0; \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3.2}$$

Derivando en (3.1) y usando el resultado junto con (3.2) para eliminar $P_{n-1}'(x)$ obtenemos

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x); \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{3.3}$$

de forma análoga, eliminando $P_{n+1}'(x)$ se tiene

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x); \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3.4}$$

sumando (3.3) y (3.4) se obtiene

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x); \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3.5}$$

reemplazando n por $n-1$ en (3.3) y usando el resultado junto con (3.4) para eliminar $P_{n-1}'(x)$ se tiene:

$$(1 - x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x); \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3.6}$$

Finalmente derivando en (3.6) respecto de x y usando el resultado junto con (3.4) para eliminar nuevamente $P'_{n-1}(x)$ se llega a:

$$\Big[(1-x^2)P'_n(x)\Big]' + n(n+1)P_n(x) = 0; \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

lo que demuestra que el polinomio de Legendre $P_n(x)$ es solución de una ecuación diferencial de segundo orden.

Nota: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$ (Ec. de Legendre)

Se pueden obtener, mediante cambios de variables, otras ecuaciones diferenciales cuyas soluciones se pueden expresar en términos de los polinomios de Legendre. Por ejemplo, si tomamos $x = cos\ \theta$, $1 - x^2 = 1 - cos^2\theta = sen^2\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{dx}(-sen\ \theta) \Rightarrow -\frac{1}{sen\ \theta}\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}$$

luego la ecuación $\Big[(1-x^2)y'\Big]' + n(n+1)y = 0$ queda

$$-\frac{1}{sen\ \theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen^2\theta(-\frac{1}{sen\ \theta})\frac{dy}{d\theta}\right] + n(n+1)y = 0$$

o bien

$$\frac{1}{sen\ \theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen\ \theta\ \frac{dy}{d\theta}\right] + n(n+1)y = 0$$

siendo $y = P_n(cos\ \theta)$

Haciendo uso de técnicas de integración en variable compleja, se pueden obtener representaciones integrales de los polinomios de Legendre.

- $$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2-1}cos\phi\right]^n d\phi$$

  Si $x \in [-1, 1]$ esta representación permite comprobar que $|P_n(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, ya que

  $$\left|x + \sqrt{x^2-1}cos\ \phi\right| = \left|x + i\sqrt{1-x^2}cos\ \phi\right| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)cos^2\phi} \leq \sqrt{x^2 + (1-x^2)} = 1$$

  $$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|x + \sqrt{x^2-1}cos\phi\right|^n d\phi \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\phi = 1$$

- $$P_n(cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{cos(n+\frac{1}{2})\psi}{\sqrt{2cos\psi - 2cos\theta}}d\psi\ , \qquad (0 < \theta < \pi,\ \ n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

Veamos a continuación que los polinomios de Legendre constituyen una familia ortogonal respecto a la función peso $\rho(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$, es decir que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad si\ m \neq n$$

Para ello usaremos la ecuación diferencial

$$\Big[(1 - x^2)P_n'(x)\Big]' + n(n+1)P_n(x) = 0$$

aplicándosela a $P_m(x)$

$$\Big[(1 - x^2)P_m'(x)\Big]' + m(m+1)P_m(x) = 0$$

multiplicando la primera por $P_m(x)$, la segunda por $P_n(x)$ y restando a la segunda la primera se obtiene

$$\Big[(1 - x^2)P_m'(x)\Big]' P_n(x) - \Big[(1 - x^2)P_n'(x)\Big]' P_m(x) + [m(m+1) - n(n+1)]P_m(x)P_n(x) = 0$$

o bien

$$\Big\{(1 - x^2)\left[P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x)\right]\Big\}' + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0$$

integrando sobre el intervalo $[-1, 1]$ obtenemos

$$(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

luego si $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

Para determinar el resultado de la integral $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$, actuemos como sigue: reemplazemos en la relación

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

n por $n-1$ y multiplicamos por $(2n+1)P_n(x)$

$$n(2n+1)P_n^2(x) - (2n-1)(2n+1)xP_n(x)P_{n-1}(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x) = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, ...)$$

si a ésta le restamos la original multiplicada por $(2n-1)P_{n-1}(x)$ obtenemos

$$n(2n+1)P_n^2(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x) - (n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) - n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0, \ (n = 2, 3, 4,$$

integrando sobre el intervalo $[-1, 1]$

$$n(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = n(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx \qquad (n = 2, 3, 4, ...)$$

o bien

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = \frac{2n-3}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x)dx = ... = \frac{3}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

además

$$\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx = 2 = \frac{2}{2.0+1} \quad y \quad \int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \frac{2}{3} = \frac{2}{2.1+1}$$

luego

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Nota: $P_n(cos\theta) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi n\ sen\theta}} sen\left[(n+\frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}\right]$, $(n \to \infty)$, $(\delta \leq \theta \leq \pi - \delta)$

Para terminar este apartado planteemos el representar funciones de L^2 en serie de polinomios de Legendre. Sea $f(x)$ definida en $(-1, 1)$ y tal que $\int_{-1}^{1} |f(x)|dx$ y $\int_{-1}^{1} |f^2(x)|dx$ existan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)P_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2m+1}c_m$$

por lo que

$$c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx \qquad (m = 0, 1, 2, 3, ...)$$

Nota: La serie devolverá el valor de $f(x)$ en los puntos donde ésta sea continua. En los puntos de discontinuidad promediará el salto, es decir, devolverá $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$.

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < \alpha \\ 1 & \alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2}\int_{\alpha}^{1} P_n(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1} (2n+1)P_n(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^1 \left[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right] dx = -\frac{1}{2}\left[P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)\right] \quad y \quad c_0 = \frac{1}{2}(1-\alpha)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(1-\alpha) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)\right] P_n(x), \qquad (-1 < x < 1)$$

$$S_m(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left[P_{n+1}(\alpha)P_n(\alpha) - P_n(\alpha)P_{n-1}(\alpha)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P_{m+1}(\alpha)P_m(\alpha)$$

y como $P_n(\alpha) \ \to \ 0$ cuando $n \ \to \ \infty$

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\alpha) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[f(\alpha^+) + f(\alpha^-)\right]$$

4. Polinomios de Hermite

Otra familia importante de polinomios ortogonales son los polinomios de Hermite $H_n(x)$.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

y en general

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

La función generatriz de los polinomios de Hermite viene dada por:

$$W(x,t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n, \qquad (|t| < \infty)$$

Nota: en realidad $W(x,t)$ es la función generatriz de los polinomios $\dfrac{H_n(x)}{n!}$.

La función e^{2xt-t^2} es analítica en t por tanto admite desarrollo de Taylor en $t = 0$

$$W(x,t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n W}{\partial t^n}\right]_{t=0} t^n, \qquad (|t| < \infty)$$

$$\left[\frac{\partial^n W}{\partial t^n}\right]_{t=0} = e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2}\left[\frac{d^n e^{-u^2}}{du^n}\right]_{u=x} = H_n(x)$$

No es complicado comprobar que

$$H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!} \quad y \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{\partial W}{\partial t} - (2x - 2t)W = 0$, podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0$$

de donde se obtiene

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

si partiésemos del hecho de que $\dfrac{\partial W}{\partial x} - 2tW = 0$, tendríamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0$$

o bien

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

llevando este resultado a la igualdad anterior

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0$$

derivando respecto a x

$$H_{n+1}'(x) - 2H_n(x) - 2xH_n'(x) + H_n''(x) = 0$$

$$2(n+1)H_n(x) - 2H_n(x) - 2xH_n'(x) + H_n''(x) = 0$$

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

Nota: La ecuación diferencial $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$ se denomina ecuación de Hermite.

Los polinomios de Hermite admiten las siguientes representaciones integrales

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} cos(2xt) dt \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} sen(2xt) dt \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

las cuales se pueden reunir en una sola

$$H_n(x) = \frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} t^n dt \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Los polinomios de Hermite son ortogonales respecto a la función peso $\rho(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

Si en la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ hacemos el cambio $y = e^{\frac{x^2}{2}}u$, obtenemos

$$u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0$$

siendo $u_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ una de sus soluciones. Tomemos las igualdades

$$u_n'' + (2n + 1 - x^2)u_n = 0 \quad y \quad u_m'' + (2m + 1 - x^2)u_m = 0$$

multiplicando la primera por u_m, la segunda por u_n y operando

$$\frac{d}{dx}(u_n' u_m - u_m' u_n) + 2(n - m)u_m u_n = 0$$

integrando sobre $(-\infty, \infty)$

$$2(n - m) \int_{-\infty}^{\infty} u_m(x)u_n(x)dx = 0$$

es decir

$$(n - m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)dx = (n - m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = 0$$

El valor para $m = n$, se obtiene siguiendo los pasos:

1. se sustituye n por $n - 1$ en

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

2. se multiplica el resultado por $H_n(x)$

$$H_n^2(x) - 2xH_n(x)H_{n-1}(x) + 2(n - 1)H_n(x)H_{n-2}(x) = 0$$

3. a esta igualdad le restamos la primera multiplicada por $H_{n-1}(x)$

$$H_n^2(x) + 2(n - 1)H_n(x)H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0 \quad (n = 2, 3, 4, ...)$$

4. se multiplica por e^{-x^2} y se integra sobre $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)dx \quad (n = 2, 3, 4, ...)$$

5. se aplica reiteradamente esta última igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^{n-1}n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (n = 2, 3, 4, ...)$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)dx = \sqrt{\pi} = 2^0 0! \sqrt{\pi} \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)dx = 2\sqrt{\pi} = 2^1 1! \sqrt{\pi}$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

y la familia de polinomios $M_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} H_n(x)$ constituye un sistema ortonormal de polinomios respecto a la función peso $\rho(x) = e^{-x^2}$ en $(-\infty, \infty)$. Además la familia $\phi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ constituye un sistema ortonormal de funciones sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Los polinomios de Hermite tienen la siguiente representación asintótica para valores grandes de n:

$$H_n(x) \approx 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} cos \left(\sqrt{2n+1}\, x - \frac{n\pi}{2} \right) \qquad (n \to \infty)$$

Las funciones $f(x) \in L^2_{e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$ admiten un desarrollo en serie de polinomios de Hermite. $f(x) \in L^2_{e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$ si las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x)dx$$

existen, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

siendo

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

donde la serie devuelve el valor de $f(x)$ en los puntos donde ésta es continua y $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$ donde es discontinua.

Ejemplos:

1. $f(x) = x^{2p}, \quad (p = 0, 1, 2, ...)$

$$x^{2p} = \sum_{n=0}^{p} c_{2n} H_{2n}(x)$$

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} H_{2n}(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} (-1)^{2n} e^{x^2} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(e^{-x^2})dx =$$
$$= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-2n}dx = \frac{(2p)!}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}(2p-2n)!} \Gamma(p-n+\frac{1}{2}) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(2n)!(p-n)!}$$

luego

$$x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sum_{n=0}^{p} \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(p-n)!} \qquad (-\infty < x < \infty), \quad (p = 0, 1, 2, ...)$$

de forma análoga

$$x^{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}} \sum_{n=0}^{p} \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(p-n)!} \qquad (-\infty < x < \infty), \quad (p = 0, 1, 2, ...)$$

2. $f(x) = e^{ax}$

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$$

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ax} H_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) dx = \frac{a^n}{2^n n!} e^{\frac{a^2}{4}}$$

$$e^{ax} = e^{\frac{a^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n H_n(x)}{2^n n!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

5. Los polinomios de Laguerre

$$L_n^{\alpha}(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}) \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \;\; (\alpha > -1)$$

Los polinomios $L_n^{\alpha}(x)$ se conocen como los polinomios de Laguerre generalizados.

$$L_0^{\alpha}(x) = 1, \quad L_1^{\alpha}(x) = 1 + \alpha - x, \quad L_2^{\alpha}(x) = \frac{1}{2}[(1+\alpha)(2+\alpha) - 2(2+\alpha)x + x^2]$$

en general, usando la regla de Leibniz

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{x^k}{k!(n-k)!}$$

Nota: Los polinomios $L_n^0(x) = L_n(x)$ constituyen los polinomios de Laguerre.

$$W(x,t) = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n, \qquad (|t| < 1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (\alpha+1)(1-t)^{-\alpha-2} e^{-\frac{xt}{1-t}} + (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} \frac{-x}{(1-t)^2} = \left[(\alpha+1)(1-t)^{-\alpha-2} - x(1-t)^{-\alpha-3}\right] e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

de donde se obtiene

$$(1-t)^2 \frac{\partial W}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)]W = 0$$

lo que permite concluir

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) + (x - \alpha - 2n - 1)L_n^{\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

por otro lado

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -t(1-t)^{-\alpha-2} e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

por lo que

$$(1-t)\frac{\partial W}{\partial x}+tW=0$$

y obtenemos

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx}-\frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx}+L_{n-1}^\alpha(x)=0, \qquad (n=1,2,3,...)$$

eliminando $L_{n-1}^\alpha(x)$ de las dos igualdades anteriores

$$(x-n-1)\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx}+(n+1)\frac{dL_{n+1}^\alpha(x)}{dx}+(2n+2+\alpha-x)L_n^\alpha(x)-(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)=0, \quad (n=0,1,2,...)$$

sustituyendo n por $n-1$ en esta última ecuación y usando el resultado junto con la igualdad anterior a ésta para eliminr $\frac{d}{dx}L_{n-1}^\alpha(x)$ obtenemos

$$x\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx}=nL_n^\alpha(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \qquad (n=1,2,3,...)$$

derivando respecto de x y usando igualdades anteriores para eliminar $\frac{d}{dx}L_{n-1}^\alpha(x)$ y $L_{n-1}^\alpha(x)$ se llega a

$$x\frac{d^2L_n^\alpha(x)}{dx^2}+(\alpha+1-x)\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx}+nL_n^\alpha(x)=0, \qquad (n=0,1,2,...)$$

Nota: La ecuación diferencial $xy''+(\alpha+1-x)y'+\lambda y=0$ se denomina ecuación generalizada de Laguerre y $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$ ecuación de Laguerre.

Haciendo el cambio de variable $y=e^{\frac{x}{2}}x^{-\nu}u$ obtenemos la ecuación

$$xu''+(\alpha+1-2\nu)u'+\left[n+\frac{\alpha+1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{\nu(\nu-\alpha)}{x}\right]u=0$$

siendo $u_n^\alpha(x)=e^{-\frac{x}{2}}x^\nu L_n^\alpha(x)$ una de sus soluciones.

Los polinomios generalizados de Laguerre admiten la representación integral para $x>0$

$$L_n^\alpha(x)=\frac{e^x x^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!}\int_0^\infty t^{n+\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha(2\sqrt{xt})e^{-t}dt \qquad (\alpha>1,\ \ n=0,1,2,...)$$

En particular para $\alpha=\pm\frac{1}{2}$

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{e^x}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{n-\frac{1}{2}}cos(2\sqrt{xt})e^{-t}dt=\frac{2e^x}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{2n}cos(2\sqrt{x}u)e^{-u^2}du=\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!}H_{2n}(\sqrt{x})$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{e^x}{n!\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty t^n sen(2\sqrt{xt})e^{-t}dt=\frac{2e^x}{n!\sqrt{x\pi}}\int_0^\infty u^{2n+1}sen(2\sqrt{x}u)e^{-u^2}du=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!}\frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

Los polinomios de Laguerre son ortogonales respecto a la función peso $\rho(x) = e^{-x}x^\alpha$ en el intervalo $0 \le x < \infty$, es decir,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)dx = 0 \qquad (m \neq n) \ (\alpha > -1)$$

y si $m = n$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha \left[L_n^\alpha(x)\right]^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \ (\alpha > -1)$$

Toda función $f(x) \in L^2_{e^{-x}x^\alpha}(0, \infty)$ se puede representar en serie de polinomios de Laguerre

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n^\alpha(x) \qquad (0 < x < \infty)$$

donde

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f(x)L_n^\alpha(x)dx$$

Nota: La serie devolverá el valor de $f(x)$ en los puntos de continuidad de f y el valor $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ en los puntos de discontinuidad.

Ejemplos:

1. $f(x) = x^\nu$, $(\nu > -\frac{1}{2}(\alpha+1))$

$$x^\nu = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n^\alpha(x)$$

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{\nu+\alpha}e^{-x}L_n^\alpha(x)dx = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty x^\nu \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}x^{n+\alpha}\right]dx =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\nu-n+1)}$$

luego

$$x^\nu = \Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+1) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\nu-n+1)} L_n^\alpha(x) \qquad (0 < x < \infty), \ (\alpha > -1)$$

en caso de que $\nu = p \in \mathbb{N}$

$$x^p = \Gamma(p+\alpha+1)\Gamma(p+1) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(p-n+1)} L_n^\alpha(x) \qquad (0 < x < \infty), \ (\alpha > -1), \ (p = 0, 1, 2, ...)$$

2. $f(x) = e^{-ax}$

$$e^{-ax} = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n^\alpha(x)$$

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha e^{-ax} L_n^\alpha(x) dx = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x} x^{n+\alpha}] dx$$

$$= \frac{a^n}{(a+1)^{n+\alpha+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$e^{-ax} = (a+1)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^n L_n^\alpha(x) \qquad (0 \leq x < \infty)$$

Otra forma de resolver este ejemplo sería tomar $t = \dfrac{a}{a+1}$ en $W(x,t)$ función generatriz.