TEMA II: FUNCIONES GAMMA Y BETA

1. La función Gamma de Euler

Definición: La función Gamma de Euler $\Gamma : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$\Gamma(x) = \int_{0^+}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt; \qquad x \in (0,+\infty)$$

La siguiente proposición demuestra la validez de la definición dada.

Proposición: La integral $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ es convergente para $x > 0$.

Demostración:

$$\int_{0^+}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_{0^+}^{1} t^{x-1}e^{-t}dt + \int_{1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

veamos que el primer sumando, I_1, es convergente para para $x > 0$ y el segundo, I_2, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \geq 1$, I_1 es convergente puesto que su integrando es una función continua, y por tanto, integrable en $[0,1]$. Si $0 \leq x \leq 1$ ocurre que $\forall t > 0$, $0 < t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$ y la integral $\displaystyle\int_{0^+}^{1} t^{x-1}dt$ es convergente para $0 < x < 1$. Por otra parte

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$$

y como $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^{-2}dt$ es convergente, entonces I_2 es convergente.

Proposición: Para todo $x > 0$, se tiene $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demostración: Sean α y β dos números reales tales que $0 < \alpha < \beta$, integrando por partes ($u = t^x$; $dv = e^{-t}dt$) en la siguiente integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^{x}e^{-t}dt = \alpha^x e^{-\alpha} - \beta^x e^{-\beta} + x\int_{\alpha}^{\beta} t^{x-1}e^{-t}dt$$

tomando límite cuando $\alpha \to 0^+$ y $\beta \to +\infty$ en ambos lados de la igualdad, obtenemos la igualdad deseada.

Corolario: Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n+1) = n!$.

Demostración: Compruébese que $\Gamma(1) = 1$ y aplíquese inducción.

La fórmula $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ nos permite conocer el valor de la función $\forall x > 0$, conociendo tan sólo su valor sobre el intervalo $(0,1]$. Además permite extender la definición de $\Gamma(x)$ para los $x < 0$, con $x \neq -1, -2, -3, ...$ Por ejemplo si $x \in (-1, 0)$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}; \qquad x+1 \in (0,1)$$

y así sucesivamente.

Propiedades:

- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{sen(\pi x)}$
- $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$ (fórmula de duplicación)
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\displaystyle\prod_{m=1}^{\infty}\{(1+\frac{x}{m})e^{-\frac{x}{m}}\}$ ($\gamma \equiv$ constante de Euler).

Ejercicios

1. Calcular

$$a)\ \frac{\Gamma(3)\Gamma(2'5)}{\Gamma(5'5)}; \qquad b)\ \Gamma(-\frac{1}{2}); \qquad c)\ \Gamma(-\frac{5}{2})$$

2. Calcular las integrales

$$a)\ \int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx; \quad b)\ \int_0^\infty \sqrt{y}e^{-y^3}dy; \quad c)\ \int_0^\infty 3^{-4z^2}dz; \quad d)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-ln\ x}}$$

2. La función Beta de Euler

Definición: La función Beta de Euler $B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$B(x,y) = \int_{0^+}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (x > 0,\ y > 0)$$

Proposición: La integral $\displaystyle\int_{0^+}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ es convergente para $x > 0$ e $y > 0$.

Demostración:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{t^{x-1}} = 1 = \lim_{t\to 1^-} \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(1-t)^{y-1}}$$

$$\int_{0^+}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{1-x}} < \infty \;\; si \;\; 1-x<1 \implies 0<x$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{dt}{(1-t)^{1-y}} < \infty \;\; si \;\; 1-y<1 \implies 0<y$$

Proposición: Para cada par de números reales positivos x e y, se verifica:

$$B(x;y) = 2\int_{0^+}^{\frac{\pi}{2}^-} sen^{2x-1}t\; cos^{2y-1}t\; dt$$

Demostración: Haciendo el cambio de variable $t = sen^2 z$ en la integral $\int_{\psi}^{\eta} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ con $0<\psi<\eta<1$.

$$\int_{\psi}^{\eta} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = 2\int_{arcsen\sqrt{\psi}}^{arcsen\sqrt{\eta}} sen^{2x-1}z\; cos^{2y-1}z\; dz$$

tomando límites cuando $\psi \to 0^+$ y $\eta \to 1^-$ se obtiene el resultado.

Algunas fórmulas notables

- $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- $B(x,y) = B(y,x)$

Ejercicios

1. Deducir el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$ usando la función Beta de Euler.
2. Demostrar que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{sen(\pi x)}$ sabiendo que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{sen(\pi x)}$.
3. Calcular las siguientes integrales:

$$a)\int_0^1 x^4(1-x)^3dx; \qquad b)\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}dx}; \qquad c)\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$d)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^6\theta\; d\theta; \qquad e)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^4\theta\; cos^5\theta\; d\theta; \qquad f)\int_0^{\pi} cos^4\theta\; d\theta$$