

Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Polinomios Ortogonales

1. Demostrar las siguientes propiedades de los polinomios de Legendre:

$$P_n(1) = 1; \quad P_n(-1) = (-1)^n; \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}; \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

2. Comprobar que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

3. Demostrar que para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ se verifica

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0$$

lo que demuestra que los polinomios de Legendre son ortogonales.

4. Comprobar que

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

y usar el resultado para demostrar que

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

5. Demuéstrese que:

$$\int_x^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]$$

Dedúzcase de ello el valor de la integral

$$\int_0^1 x P_n(x) dx$$

6. Calcular el desarrollo en serie de polinomios de Legendre de la funciones $f(x) = |x|$; y $f(x) = (1-x)^{\frac{-1}{2}}$.

7. Demostrar que:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

8. Comprobar que

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

9. Desarrollar en serie de polinomios de Hermite la siguiente función:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

10. Pruébese que si $m \in \mathbb{N}$:

$$(a) \quad L_n^m(x) = (-1)^m \frac{n!}{(n+m)!} \frac{d^m}{dx^m} [L_{n+m}(x)]$$

$$(b) \quad \frac{d^m}{dx^m} [e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x)] = e^{-x} x^{\alpha-m} L_{n+m}^{\alpha-m}(x)$$