Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Hipergeométricas

1. Demostrar que ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

2. Usando la notación

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) \equiv F \qquad {}_2F_1(\alpha \pm 1, \beta; \gamma; x) \equiv F(\alpha \pm 1)$$

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta \pm 1; \gamma; x) \equiv F(\beta \pm 1) \quad {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma \pm 1; x) \equiv F(\gamma \pm 1)$$

donde las funciones $F(\alpha \pm 1)$, $F(\beta \pm 1)$ y $F(\gamma \pm 1)$ se denominan contiguas a F, generar a partir de las relaciones de recurrencia, entre F y sus funciones contiguas, dadas en clase al menos dos nuevas relaciones.

3. Demostrar la veracidad de la relación de recurrencia siguiente:

$$\gamma(\gamma+1)\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \gamma(\gamma-\alpha+1)\, {}_2F_1(\alpha, \beta+1; \gamma+2; x) + \alpha[\gamma-(\gamma-\beta)x]\, {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+2; x)$$

4. Comprobar que

$$\frac{d^m}{dx^m}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}\, {}_2F_1(\alpha+m, \beta+m; \gamma+m; x))$$

5. Idem para

$$\frac{d}{dx}[x^{\alpha}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)] = \alpha x^{\alpha-1}\, {}_2F_1(\alpha+1, \beta; \gamma; x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{\gamma-1}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)] = (\gamma-1)x^{\gamma-2}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma-1; x)$$

añadiendo a γ, además de las restricciones habituales, el que no pueda valer 1 en la segunda de las igualdades.

6. Haciendo uso de la representación integral de la función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$, deducir las siguientes igualdades:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = (1-x)^{-\alpha}\ {}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}) $$
$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = (1-x)^{-\beta}\ {}_2F_1(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}) $$

7. Demostrar que la función Hipergeométrica Confluente ${}_1F_1(\alpha,\gamma;x)$ verifica la ecuación diferencial

$$ xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 $$

8. Deducir la siguiente representación integral si $\gamma > \alpha > 0$:

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt $$

9. Usando la representación integral del problema anterior, demostrar que si $\gamma > \alpha > 0$

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma;x) = e^x\ {}_1F_1(\gamma-\alpha,\gamma;-x) $$

10. Deducir la siguiente igualdad

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma+1;x) = \gamma \int_0^1\ {}_1F_1(\alpha,\gamma;xt) t^{\gamma-1} dt $$