Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones de Bessel

1. Demostrar las siguientes propiedades de las funciones de Bessel de primera especie

- $\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$
- $\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$
- $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)$
- $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x)$
- $(\frac{d}{xdx})^m[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x)$
- $(\frac{d}{xdx})^m[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = (-1)^m x^{-(\nu+m)}J_{\nu+m}(x)$

2. Demostrar las siguientes propiedades de las funciones de Bessel de segunda especie

- $\frac{d}{dx}[x^{\nu}Y_{\nu}(x)] = x^{\nu}Y_{\nu-1}(x)$
- $\frac{d}{dx}[x^{-\nu}Y_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x)$
- $Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}Y_{\nu}(x)$
- $Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x) = 2Y'_{\nu}(x)$
- $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$

3. Demostrar que para todo $n = 0, 1, 2, ...$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}(\frac{d}{xdx})^n[\frac{sen\ x}{x}]$$

4. Demostrar la siguiente igualdad

$$\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} \quad (\nu > -\frac{1}{2})$$

5. Haciendo uso de la igualdad anterior, deducir la siguiente representación integral de las funciones de Bessel de primera especie

$$J_{\nu}(x) = \frac{(\frac{x}{2})^{\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}cos(xt)dt \quad (\nu > -\frac{1}{2})$$

6. Demostrar la siguiente igualdad

$$J_\nu(x) = \frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi sen^{2\nu}\theta\ cos(xcos\ \theta)d\theta \quad (\nu > \frac{-1}{2})$$

Demostrar que además en el caso $\nu = 0$ también se puede escribir

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(xsen\ \theta)d\theta$$

hacer uso de ésta y de la igualdad

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ad\theta}{a^2+b^2sen^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0,\ b>0)$$

para demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0,\ b>0)$$

7. Demostrar que para $\mu+\nu > -1$, se verifica que

$$\int_0^x t^\mu J_\nu(t)dt = x^\mu J_{\nu+1}(x) - (\mu-\nu-1)\int_0^x t^{\mu-1}J_{\nu+1}(t)dt$$

8. Si denotamos por $j_{\nu,1},\ j_{\nu,2},\ ....$ los ceros positivos de $J_\nu(x)$ ordenados de forma creciente, demostrar que si $\nu > -1$,

$$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < ......$$

Indicación: Domostar, haciendo uso del teorema de Rolle, que entre dos ceros consecutivos de $x^{-\nu}J_\nu(x)$ hay al menos un cero de $x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ y que entre dos ceros consecutivos de $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$ hay al menos un cero de $x^{\nu+1}J_\nu(x)$.