

Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Elementales

1. **a)** Hallar todos los valores de c tales que $\ln(x) = c + \int_e^x \frac{1}{t} dt$ para todo $x > 0$.
b) Sea $f(x) = \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ si $x > 0$. si a y b son números dados, siendo $ab \neq -1$, hallar todos los x tales que $f(x) = f(a) + f(b)$.
2. En cada caso, hallar un x que satisfaga la igualdad dada
a) $\ln(1+x) = \ln(1-x)$, **b)** $\ln(1+x) = 1 + \ln(1-x)$, **c)** $\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 1$.
3. Sea $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ si $x > 0$. Describir los intervalos en los que f es creciente, decreciente, convexa y cóncava. Esbozar la gráfica de f .
4. Deducir la fórmula recurrente

$$\int x^m \ln^n(x) dx = \frac{x^{m+1} \ln^n(x)}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1}(x) dx$$

y utilizarla para integrar $\int x^3 \ln^3(x) dx$.

5. **a)** Si $x > 0$, sea $f(x) = x - 1 - \ln(x)$, $g(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$. Examinar los signos de f' y g' para demostrar que las desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$$

son válidas para $x > 0$, $x \neq 1$. Cuando $x = 1$, se convierten en igualdades.

- b)** Trazar las gráficas de las funciones $A(x) = x - 1$ y $B(x) = 1 - \frac{1}{x}$ para $x > 0$, e interpretar geométicamente las desigualdades del apartado a).
6. Demostar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

con los métodos siguientes: **a)** utilizando la definición de $[\ln(x)]'_{x=1}$; **b)** usando el resultado del ejercicio anterior.

7. Si $a > 0$, demostrar que $\ln(a^r) = r\ln(a)$ para todo número racional r .
8. Hallar, usando la derivada logarítmica, la derivada de $f(x)$ en los siguientes casos, en los cuales se supone la función definida para los x en que tengan sentido las correspondientes expresiones.
- a)** $f(x) = x^x$; **b)** $f(x) = (\sen x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sen x}$; **c)** $f(x) = \frac{x^2(3-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)(3+x)^{\frac{2}{3}}}$
9. Dada la función $f(x) = x^r$ ($x > 0$), usar la exponencial para demostrar la validez de la fórmula $f'(x) = rx^{r-1}$, para cualquier número real r .

10. Dada la definición $a^x = e^{x\ln a}$, demostrar que:

- a)** $\ln a^x = x\ln a$; **b)** $(ab)^x = a^x b^x$; **c)** $a^x a^y = a^{x+y}$; **d)** $(a^x)^y = a^{xy}$;
e) si $a \neq 1$, entonces $y = a^x \iff x = \log_a y$

11. Sea f una función definida en todo el eje real, con derivada f' que satisface la ecuación

$$f'(x) = cf(x) \quad \text{para todo } x$$

donde c es una constante. Probar que existe una constante K tal que $f(x) = Ke^{cx}$ para cada x .
 (Indicación: Tómesese $g(x) = f(x)e^{-cx}$ y estudiar $g'(x)$).

12. Sea f una función definida en todo el eje real. Supóngase también que f satisface la ecuación funcional

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{para todo } x \text{ e } y \quad (0.1)$$

- a)** Aplicando sólo la ecuación funcional demostrar que $f(0)$ es 0 ó 1. Demostrar además que si $f(0) \neq 0$ entonces $f(x) \neq 0$ para todo x . Supóngase, que además de (0.1), f posee derivada $f'(x)$ para todo x , y demuéstrese las siguientes propiedades:
- b)** $f'(x)f(y) = f(x)f'(y)$ para todo x e y .
- c)** Existe una constante c tal que $f'(x) = cf(x)$ para todo x .
- d)** $f(x) = e^{cx}$ si $f(0) \neq 0$.

13. Deducir las siguientes propiedades de las funciones hiperbólicas:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(-x) = -\sinh x$
- $\cosh(-x) = \cosh x$
- $\tanh(-x) = -\tanh x$
- $\cosh x + \sinh x = e^x$
- $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ (n entero)