Problemas del Tema 3.

1. Hallar los extremales de los funcionales siguientes:

   (a) $J(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx.$

   (b) $J(y) = \int_a^b (y^2 + 2xyy')dx.$

   (c) $J(y) = \int_a^b y'(1 + x^2 y')dx.$

   (d) $J(y) = \int_a^b (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx.$

   (e) $J(y) = \int_a^b (xy' + y'^2)dx.$

   (f) $J(y) = \int_a^b \frac{1+y'^2}{y'^2} dx.$

   (g) $J(y) = \int_a^b (y^2 + y'^2 - 2y \operatorname{sen} x)dx.$

   (h) $J(y) = \int_a^b \frac{y'^2}{x^3} dx.$

   (i) $J(y) = \int_a^b (y^2 + y'^2 + 2ye^x)dx.$

   (j) $J(y) = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \operatorname{sen} x)dx.$

   (k) $J(y) = \int_a^b \left(y^2 + y'^2 + \frac{2y}{\cosh x} \right) dx.$

   (l) $J(y) = \int_a^b (x^2 y'^2 + 2y^2 + 2xy)dx.$

2. Determinar la solución general de la ecuación de Euler correspondiente al funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x)\sqrt{1+y'^2}dx,$$

   e investigar los casos particulares $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x$.

3. Hallar las funciones en las que puede alcanzarse un extremo del funcional

$$J(y) = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')dx, \quad y(0) = 1, \ y(1) = 2.$$

4. Hallar los extremales del funcional
$$J(y,z)=\int_a^b (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx.$$

5. Hallar los extremales del funcional
$$J(y,z)=\int_0^{\pi/2} (y'^2+z'^2+2yz)dx,$$
con las condiciones de contorno $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$, $z(0)=0$, $z(\pi/2)=1$.

6. Hallar los extremales de los funcionales
$$\int_a^b (y'^2+z'^2+y'z')dx, \qquad \int_a^b (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx,$$
con condiciones de contorno determinadas.

7. Hallar los extremales de un funcional de la forma
$$\int_a^b F(y',z')dx,$$
sabiendo que $F_{y'y'}F_{z'z'}-(F_{y'z'})^2\neq 0$ en $[a,b]$.

8. Hallar los extremales de los funcionales siguientes:
   (a) $J(y)=\displaystyle\int_a^b (16y^2-y''^2+x^2)dx.$
   (b) $J(y)=\displaystyle\int_a^b (2xy+y'''^2)dx.$
   (c) $J(y)=\displaystyle\int_a^b (y''^2-2y'^2+y^2-2y\operatorname{sen}x)dx.$
   (d) $J(y)=\displaystyle\int_a^b (y'''^2+y^2-2yx^3)dx.$

9. Hallar las funciones en las que puede alcanzarse un extremo del funcional
$$J(y)=\int_0^1 (y''^2-2xy)dx, \quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{120}.$$

10. Determinar los extremales del funcional
$$J(y)=\int_0^1 (1+y''^2)dx,$$
con las condiciones de contorno $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

11. Determinar los extremales del funcional
$$J(y)=\int_0^{\pi/2} (y''^2-y^2+x^2)dx,$$
con las condiciones de contorno $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y(\pi/2)=0$, $y'(\pi/2)=1$.

12. Demostrar que la ecuación de Euler del funcional
$$\int_a^b F(x, y', y'')dx$$
tiene la integral primera
$$F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''} = \text{constante.}$$

13. Demostrar que la ecuación de Euler del funcional
$$\int_a^b F(y, y', y'')dx$$
tiene la integral primera
$$F - y'\left(F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''}\right) - y''F_{y''} = \text{constante.}$$

14. Determinar la curva $y = y(x)$ que une los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, para la que la integral
$$\int_0^1 y''^2 dx$$
sea mínima si a) $y'(0) = a$, $y'(1) = b$; b) ninguna otra condición.

15. Hallar la función en la cual puede alcanzarse un extremo del funcional
$$J(y) = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2)dx, \; y(0) = 0,$$
si el otro punto frontera puede deslizarse por la recta $x = \frac{\pi}{4}$.

16. Hallar la curva en la cual puede alcanzarse un extremo del funcional
$$J(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}dx, \quad y(0) = 0,$$
si el segundo punto frontera (b, y_1) puede desplazarse por la circunferencia $(x-9)^2+y^2 = 9$.

17. Hallar las geodésicas del cilindro $x^2 + y^2 = R$ (en $\mathbf{R}^3$). (*Indicación*: usar coordenadas esféricas.)

18. Hallar los extremales del problema isoperimétrico
$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + x^2)dx,$$
con las condiciones $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $\int_0^1 y^2 dx = 2$.

19. Hallar los extremales del problema isoperimétrico

$$J(y) = \int_a^b y'^2 dx$$

con la condición $\int_a^b y dx = a$.

20. Escribir la ecuación diferencial de los extremales del problema isoperimétrico

$$J(y) = \int_0^1 (p(x)y'^2 - q(x)y^2) dx$$

con las condiciones $y(0) = y(1) = 0$, $\int_0^1 m(x)y^2 dx = 1$.

21. Hallar los extremales del funcional

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx,$$

con las condiciones $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $\int_0^1 y^2 dx = 2$.

22. Supongamos dados dos puntos A y B en el plano, y una curva que los une γ. De entre todas las curvas de longitud l que unen A y B, determinar aquélla que junto con γ encierra la región de mayor área.

23. De entre todas las curvas que unen un punto dado $(0, b)$ en el eje OY con un punto del eje OX de forma que encierre un área A junto con el eje OX, determinar la que genera el área mínima al ser rotada alrededor del eje OX.

24. Hallar los extremales del problema isoperimétrico

$$J(y, z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx,$$

con las condiciones $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $z(0) = 0$, $z(1) = 1$, $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2$.