Problemas del Tema 2.

1. Sea $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua. Consideremos el operador

$$L[y] = y'' + h(x)y \ ,$$

y las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y(a) + 2y(b) + y'(b) = 0 \\ 2y(a) - y(b) - y'(a) - y'(b) = 0 \ . \end{cases}$$

¿Se satisface la identidad de Green para el operador L con estas condiciones? ¿Y con las condiciones

$$\begin{cases} y(a) + y'(b) = 0 \\ y(b) + y'(a) = 0 \ ? \end{cases}$$

2. Supongamos ϕ es una autofunción asociada al autovalor λ del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda m(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \ , \end{cases}$$

donde $p \in C^1[0, 1]$, $q, m \in C[0, 1]$, $p, m > 0$ y $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = 1, 2$. Demostrar que

$$\lambda \int_0^1 m(x)\phi(x)^2 dx = \int_0^1 (p(x)\phi'(x)^2 - q(x)\phi(x)^2)dx + \frac{\alpha_2}{\beta_2} p(1)\phi(1)^2 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} p(0)\phi(0)^2 \ ,$$

siempre que $\beta_1, \beta_2 \neq 0$. ¿Cómo debe modificarse esta igualdad si $\beta_1 = 0$ ó $\beta_2 = 0$? Demostrar a partir de aquí que si $q(x) \leq 0$, $\alpha_2/\beta_2 \geq 0$ y $\alpha_1/\beta_1 \leq 0$, entonces $\lambda \geq 0$. Además, $\lambda > 0$, a menos que $q(x) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

3. Demostrar que las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville son reales (salvo una constante multiplicativa, que puede ser compleja).

4. Sea A una matriz real simétrica $n \times n$. Demostrar que todos sus autovalores son reales, y que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. Demostrar que existe una base ortogonal de $\mathbf{R}^N$ formada por autovectores.

5. Sea A una matriz real simétrica $n \times n$, con autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ y autovectores ortonormales correspondientes $\xi_1, \cdots, \xi_n$. Considérese el sistema de ecuaciones

$$Ax - \mu x = b, \tag{3}$$

donde μ es un número real dado, y b un vector columna dado.

(a) Demostrar que $b = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i$, donde $b_i = \langle b, \xi_i \rangle$.

(b) Demostrar que la solución de (3) es

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\lambda_i - \mu} \xi_i,$$

siempre que μ no sea uno de los autovalores de A.

(c) ¿Qué ocurre si $\mu = \lambda_i$ para algún i?

6. Calcular los autovalores y autofunciones del siguiente problema

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \ . \end{cases}$$

7. Calcular los autovalores y autofunciones del problema

$$\begin{cases} y'' - 2y' + (1+\lambda) y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \ . \end{cases}$$

¿Respecto a qué función peso son ortogonales las autofunciones?

8. Determinar los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas de Sturm-Liouville:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y'(1) = 0. \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

9. Determinar los autovalores y autofunciones del siguiente problema con valores en la frontera:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + (4 + 9\lambda) y = 0, \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

mediante dos procedimientos: (a) Introducir una nueva variable z dada por $y = s(x)z$, para que la ecuación que se obtiene no contenga término en z'. (b) Resolver el problema directamente.

10. Determinar los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas, en los que el parámetro λ aparece multiplicando a y':

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y'' + y' + \lambda(y' + y) = 0, \\ y'(0) = y(1) = 0. \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x^2 y'' - \lambda(xy' - y) = 0, \\ y(1) = 0, \ y(2) - y'(2) = 0. \end{cases}$$

11. Considérese el problema

$$\begin{cases} x^2 y'' = \lambda(xy' - y) \\ y(1) = y(2) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que este problema tiene autovalores, pero ninguno es real.

12. Determinar condiciones sobre $q(x)$ para que el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + q(x)y + \lambda y = 0 \\ \quad \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \quad \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{cases}$$

tenga todos sus autovalores positivos.

13. Determinar condiciones sobre $q(x)$ para que el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + q(x)y + \lambda y = 0 \\ \quad \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \quad \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{cases}$$

tenga exactamente k autovalores negativos.

14. ¿Es posible que el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda m(x)y = 0 \\ \quad \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \quad \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{cases}$$

tenga como autovalores a la sucesión $\{n^3\}_{n=1}^{\infty}$?

15. Sean $\{\phi_n\}$ las autofunciones normalizadas del problema $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(1) = 0$. Determinar el desarrollo en serie de las siguientes funciones en términos de $\{\phi_n\}$:

(a) $f(x) = 1$, (b) $f(x) = x$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$

16. Mediante un desarrollo en serie de autofunciones, resolver la ecuación $y'' + 2y = -x$ en $(0,1)$ con cada una de las siguientes condiciones de contorno:

(a) $y(0) = y(1) = 0$, (b) $y(0) = y'(1) = 0$, (c) $y('0) = y'(1) = 0$.

17. Sea el problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' + \dfrac{1}{4} y = f(x) \\ \\ y(1) = y(e) = 0\ . \end{cases}$$

Estúdiese si es autoadjunto. Calcúlense los autovalores y autofunciones del problema. Determínese la solución para $f(x) = x^{-1/2}$ mediante una serie de autofunciones.

18. Sea $f \in C[0,1]$. Mediante un desarrollo en serie de autofunciones, resolver la ecuación $y'' + \mu y = -f(x)$ en $(0,1)$ con cada una de las siguientes condiciones de contorno:

(a) $y(0) = y(1) = 0$, (b) $y(0) = y'(1) = 0$, (c) $y('0) = y'(1) = 0$.

Determinar los valores de μ para los que existe la solución.

19. Determinar si existe algún valor de la constante a para que cada uno de los siguientes problemas tenga solución:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y'' + \pi^2 y = a + x, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y'' + \pi^2 y = a, \\ y'(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

20. Sea L un operador diferencial lineal de segundo orden. Demostrar que la solución $y(x)$ del problema

$$\begin{cases} L[y] = f(x) \\ \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = A \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = B \end{cases}$$

puede escribirse como $y = y_1 + y_2$, siempre que y_1, y_2 sean soluciones de los problemas

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = A \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = B \end{cases} \tag{1}$$

y

$$\begin{cases} L[y] = f(x) \\ \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

respectivamente. Demostrar que el problema particular

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = \pi^2 x \\ y(0) = 1, \;\; y(1) = 0 \end{cases}$$

tiene la solución $y = c_1 \operatorname{sen}(\pi x) + c_2 \cos(\pi x) + x$, pero que esta solución no se puede obtener como suma de los dos problemas correspondientes (1) y (2), puesto que estos problemas no tienen solución.

21. Considérese el problema

$$\begin{cases} -y'' = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que la solución se puede escribir en la forma

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds,$$

donde

$$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x), & 0 \le s \le x, \\ x(1-s), & x \le s \le 1. \end{cases}$$

22. Demostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} -(y'' + y) = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

se puede escribir en la forma

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds,$$

donde

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(1-x)}{\operatorname{sen} 1}, & 0 \le s \le x, \\ \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(1-s)}{\operatorname{sen} 1}, & x \le s \le 1. \end{cases}$$

23. Calcular la función de Green para cada uno de los siguientes problemas:

(a) $\begin{cases} -y'' = f(x), \\ y'(0) = y(1) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -y'' = f(x), \\ y(0) = y(1) + y'(1) = 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -(y'' + y) = f(x), \\ y'(0) = y(1) = 0. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -y'' = f(x), \\ y(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$