Problemas del Tema 1.

1. Escribir las siguientes ecuaciones en forma autoadjunta:

   (a) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (ecuación de Hermite).

   (b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (ecuación de Bessel).

   (c) $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$ (ecuación de Laguerre).

   (d) $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ (ecuación de Tchébyshev).

2. Poner la ecuación
$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$
en la forma $y'' + q(x)y = 0$.

3. Escribir la ecuación de Bessel en la forma $y'' + q(x)y = 0$. (*Indicación:* hacer $y = x^{-1/2}z$.)

4. ¿Puede ser $y(x) = (\operatorname{sen} x)^2$ solución de una ecuación de la forma $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ en $\mathbf{R}$?

5. Dar un ejemplo de ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ en un intervalo (a, b), con $b < +\infty$, tal que las soluciones tengan infinitos ceros acumulándose en b.

6. Determinar una cota inferior para la distancia entre los ceros de las soluciones no triviales de la ecuación $y'' + xy' - (2x^2/3)y = 0$ en intervalos de la forma $(0, b)$. ¿Qué se puede deducir sobre los ceros?

7. Demostrar que, si $q(x)$ es $C^1(a, b)$, creciente (resp. decreciente) y no se anula, y $\{x_n\}$ denota la sucesión de máximos y mínimos de cualquier solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0$, entonces $|q(x_n)|^{1/2}|y(x_n)|$ es creciente (resp. decreciente).

8. Sea $q(x) = r(x)/s(x)$, con $r, s \in C^1(a, b)$ crecientes (resp. decrecientes), $s \neq 0$ en (a, b). Demostrar que si $\{x_n\}$ denota la sucesión de máximos y mínimos de una solución no trivial $y(x)$ de $y'' + q(x)y = 0$, se tiene que $|r(x_n)|^{1/2}|y(x_n)|$ es creciente (resp. decreciente). (*Indicación:* considérese la función $\mu(x) = r(x)y(x)^2 + s(x)y'(x)^2$.)

9. Sea $a \in C^1(\mathbf{R})$ una función positiva, y considérese la ecuación
$$y'' - \frac{1}{2}\frac{a'(x)}{a(x)}y' + a(x)y = 0.$$

Demostrar que las soluciones no triviales de la ecuación tienen un número infinito de ceros positivos si y sólo si

$$\int_0^\infty \sqrt{a(\tau)}d\tau = +\infty.$$

¿Qué se puede decir de la amplitud de las oscilaciones de las soluciones?

10. Determinar una función $q(x)$ de forma que las soluciones no triviales de la ecuación $y'' + q(x)y = 0$ tengan infinitos ceros, tales que la distancia entre ellos se vuelva no acotada, y que la amplitud de las oscilaciones de las soluciones vaya decreciendo con x.

11. La hipótesis del teorema de existencia de infinitos ceros para las soluciones no se da para la ecuación

$$y'' + \frac{k}{x^2}y = 0.$$

Pero la conclusión puede ser verdadera o falsa, dependiendo de la constante positiva k. Demostrar que cada solución no trivial tiene un número infinito de ceros positivos si $k > 1/4$, y únicamente un número finito si $k \leq 1/4$. (*Indicación:* hacer $x = e^t$.)

12. Si $y(x)$ es una solución no trivial de la ecuación $y'' + q(x)y = 0$ en $\mathbf{R}$, demostrar que y tiene un número infinito de ceros positivos si $q(x) \geq k/x^2$, con $k > 1/4$, y sólo un número finito si $q(x) \leq 1/(4x^2)$.

13. Demostrar que los ceros de las funciones $a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x$ y $c\,\mathrm{sen}\,x + d\cos x$ son distintos, y que se presentan alternativamente, siempre que $ad - bc \neq 0$.

14. Sea $\{x_n\}$ la sucesión de ceros de una solución no trivial de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Demostrar que, si $0 \leq \nu < 1/2$, $x_{n+1} - x_n$ es menor que π, y tiende a π cuando $n \to +\infty$. Si $\nu > 1/2$, demostrar que $x_{n+1} - x_n$ es mayor que π, y tiende a π cuando $n \to +\infty$. (*Indicación:* considérese el problema 3.)