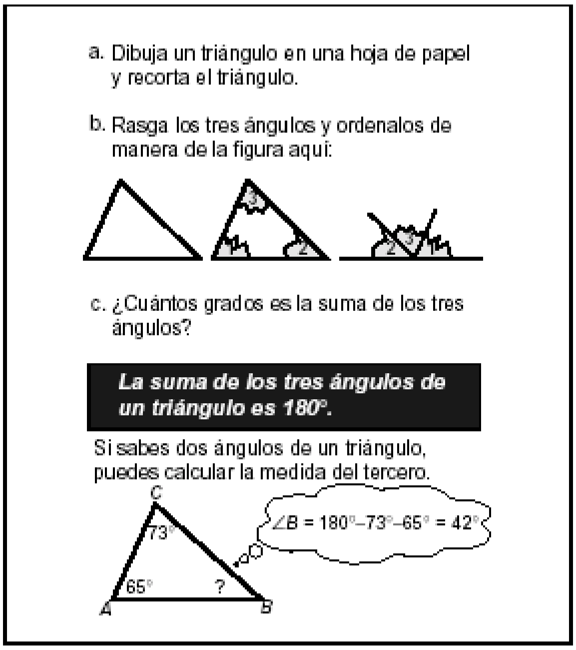
Probar o no probar, esa es la cuestión

Martín Kindt
Freudenthal Institute
Utrecht

Hace año y medio pudimos leer en el periódico más importante de Holanda, NRCHandelsblad, el artículo *Quod erat demonstrandum: se abandona la demostración en la educación matemática*, cuyo autor es Dirk van Dalen.
Una cita textual del artículo: ¿Qué es Matemática? Matemática no es el número de coches que pasan por la glorieta, ni la forma que tiene una cuerda que une la torre de la iglesia con el ayuntamiento. Los asuntos de la matemática son abstractos: números, conos, ecuaciones diferenciales.
¿Cómo podemos saber algo sobre esas cosas y cómo podemos hacer afirmaciones sobre ellas con más certeza que sobre las propias vivencias?
La respuesta es: ¡por que *demostramos* las propiedades!
Un poco más adelante leemos:
Para un matemático la demostración es como el telescopio para un astrónomo o la raqueta para un tensita.
Aún más reciente es la siguiente afirmación de Hendrik Lenstra, catedrático famoso especialista en teoría de números: *hacer matemáticas sin demostraciones es como jugar al fútbol sin pelota.*

Jugar con y sin pelota

Cuando vemos los libros de texto, para los tres primeros años de secundaria, en Holanda parece que jugamos sin pelota. A continuación muestro una página de un libro muy popular:



a. Dibuja un triángulo en una hoja de papel y recorta el triángulo.

b. Rasga los tres ángulos y ordenalos de manera de la figura aqui:

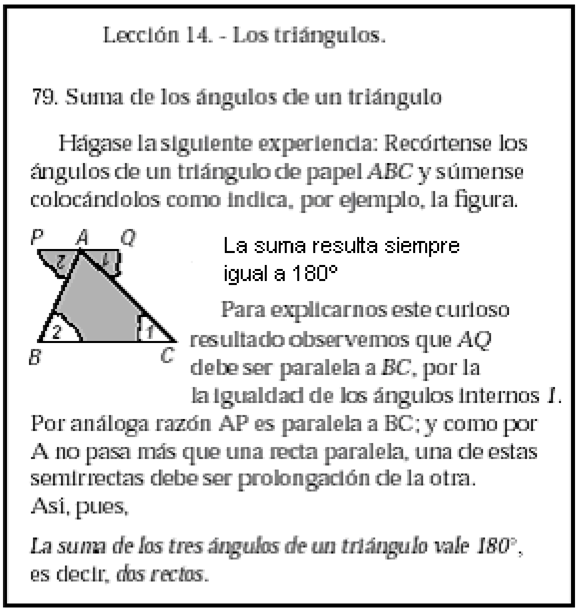
c. ¿Cuántos grados es la suma de los tres ángulos?

La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°.

Si sabes dos ángulos de un triángulo, puedes calcular la medida del tercero.

La traducción es textual así como la disposición del texto y gráficos en la página del libro. No es una demostración, sólo es un experimento. Siento algo de vergüenza y, sin duda, esto es un ejemplo de *jugar sin pelota*. El principal reparo que pongo, es que ¡no explica nada ni aporta comprensión !
Mucho mejor es la demostración que descubrí en un libro antiguo (Rey Pastor y Puig Adam, 1957). El título del libro es *Elementos de Geometría*; no es muy original, por el contrario sí lo es

el enfoque didáctico. Aquí hay una combinación de explicación y experimento. El texto dice *para explicarnos este curioso resultado...*
Los autores explican el paralelismo de AQ y BC por la igualdad de los ángulos alternos internos. De hecho es la demostración clásica, pero en un estilo informal, o quizás deba decir pre-formal.



Lección 14. - Los triángulos.

79. Suma de los ángulos de un triángulo

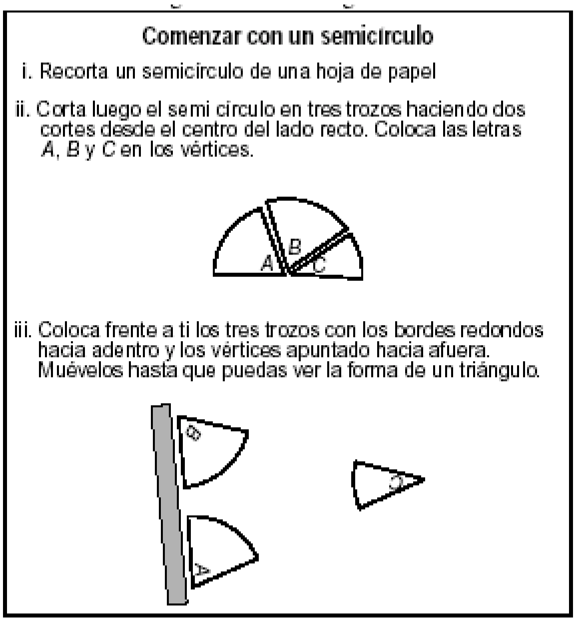
Hágase la siguiente experiencia: Recórtense los ángulos de un triángulo de papel *ABC* y súmense colocándolos como indica, por ejemplo, la figura.

La suma resulta siempre igual a 180°

Para explicarnos este curioso resultado observemos que *AQ* debe ser paralela a *BC*, por la la igualdad de los ángulos internos *1*. Por análoga razón AP es paralela a BC; y como por A no pasa más que una recta paralela, una de estas semirrectas debe ser prolongación de la otra.
Así, pues,

La suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180°, es decir, *dos rectos*.

Puede ser que la pelota no sea muy dura, pero aquí hay una pelota.
En un libro americano he encontrado un doble experimento.
Primero como el texto holandés, luego el experimento a la inversa: si la suma de tres ángulos es 180º, entonces se puede formar un triángulo con dichos ángulos.



Comenzar con un semicírculo

i. Recorta un semicírculo de una hoja de papel

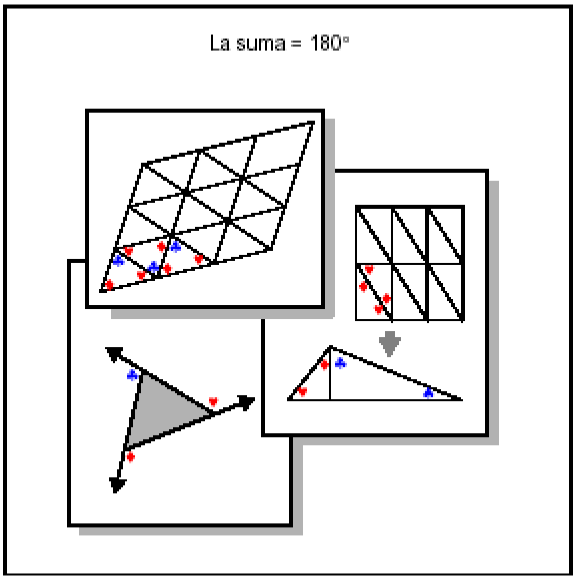
ii. Corta luego el semi círculo en tres trozos haciendo dos cortes desde el centro del lado recto. Coloca las letras *A*, *B* y *C* en los vértices.

iii. Coloca frente a ti los tres trozos con los bordes redondos hacia adentro y los vértices apuntado hacia afuera. Muévelos hasta que puedas ver la forma de un triángulo.

Este experimento doble es una mejora respecto del texto holandés, pero no me satisface del todo.
Para mí es un misterio el que los autores de dichos textos no hayan procurado hacer comprensible el teorema.

Aparte del enfoque de Rey Pastor y Puig Adam, existen otras posibilidades que utilizan de una manera informal propiedades del triángulo.

- *Utilizando triángulos congruentes, por ejemplo de cartón, para azulejar el plano.*
- *Considerando una vuelta completa alrededor de un glorieta triangular, donde la suma de los giros (y por lo tanto los ángulos exteriores) valen 360º.*
- *Usando una red de rectángulos para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo vale 180º y después, por descomposición, se puede demostrar esta propiedad para cada triángulo.*



No hay ninguna razón para elegir una sola explicación ni está prohibido enseñar más de una demostración. Al contrario, teoremas tan importantes como este y como el de Pitágoras, merecen más de una demostración.
El teorema sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo satisface el criterio del americano Morris Kline: *Una demostración solo tiene sentido si contesta a las dudas de los alumnos y si demuestra lo que no es evidente*.

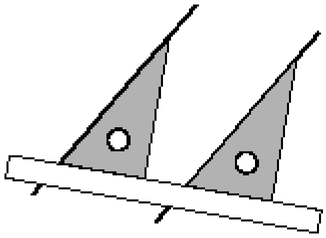
Una pequeña historia con grandes consecuencias

Ocurrió en el otoño de 1949. En el cuarto de atrás de un edificio alto, estaba empollando un chico de 12 años, luchando con un ejercicio de geometría. Ha cerrado la puerta corrediza para que no le moleste la radio. A las nueve, su padre, viene a mirar si ya ha terminado su hijo:

- *Es hora de dormir, dice su padre.*
- *No. No. Quiero resolver este problema. Respondió el hijo un poco irritado.*
- *¿Puedo ayudarte?*
- *No tienes ningún conocimiento de geometría, Papa.*
- *...*

Hacia las diez, sonaba un grito de triunfo, algo como eureka. Y aunque no pudo conciliar el sueño inmediatamente, a la siguiente mañana el niño estaba alegre y muy vivo en la clase de geometría.

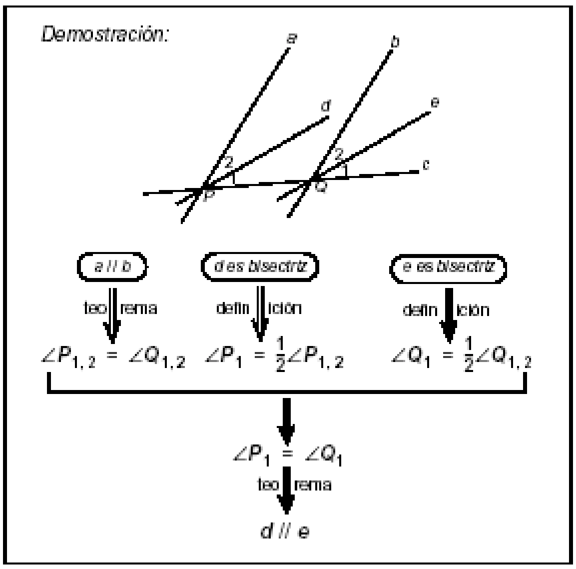
Quizás lo haya adivinado. Ese chico era yo. Todavía tengo en casa el libro de geometría y he encontrado la pregunta.
Demostrar: **Si dos rectas paralelas, son cortadas por una tercera recta, las bisectrices de los ángulos correspondientes son también paralelas**.
El profesor nos ha enseñado a dibujar líneas paralelas con regla y escuadra.



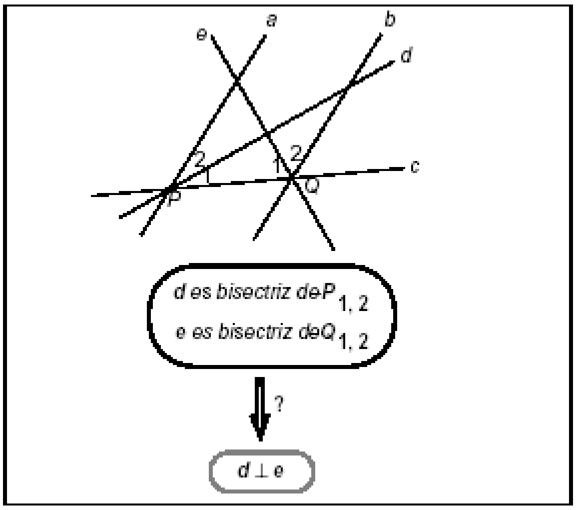
Por traslación deben ser también paralelas las bisectrices de los ángulos correspondientes.
Entonces ¿para qué demostrar la propiedad?
Este problema no satisface el criterio de Morris Kline.
Creo que esa fue la razón por la que tuve, inicialmente, dificultades con la esta cuestión. Pero , de repente ¡recibí la luz! Entendí el *juego*, el juego de la *deducción* (el juego con la pelota dura). El profesor nos ha entrenado de forma rígida sobre el *saque* del juego:

1. Analizar el texto.
2. Dibujar una figura correcta.
3. Formular los datos.
4. Formular lo que se desea demostrar.

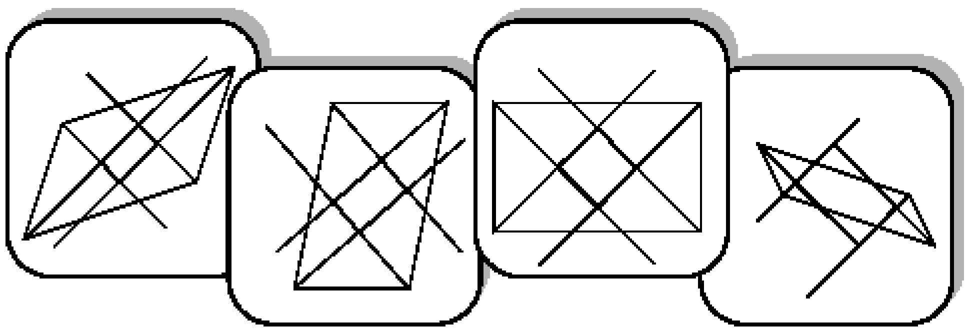
Al final utilizando los datos, definiciones y teoremas se puede deducir, en cinco pasos, una verdad que es intuitivamente clara.



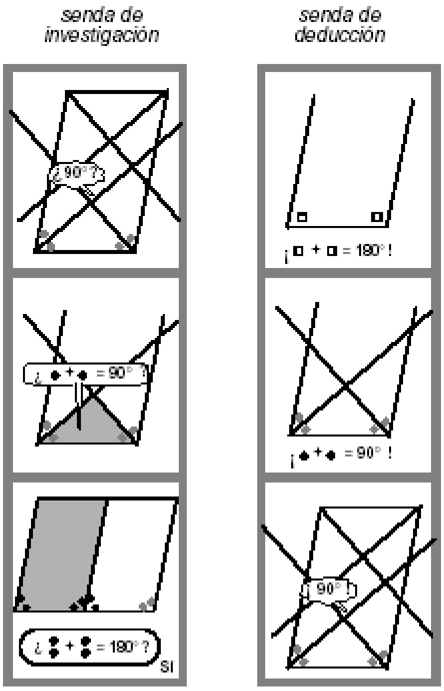
No recuerdo la redacción de mi solución, no creo que estuviera tan organizada como la de arriba. Pero estoy seguro que utilicé lo esencial. Ese momento de triunfo hizo que me enamorase de la geometría, y ese amor ha sido un amor de toda la vida hasta el punto de que determinó mi futuro profesional.
Pero yo era una excepción en ese grupo de alumnos. Sólo recuerdo a otro chico de ese grupo con la misma afición, o quizás la misma aberración.
No recuerdo si nuestra afición dependió de la evidencia de una propiedad geométrica o no. El siguiente problema en el libro, la perpendicularidad de las bisectrices de los ángulos colaterales internos, es una propiedad menos evidente. Y por lo tanto es más adecuada y desafiante el probarla.



Quince años más tarde, cuando era un joven profesor de matemáticas en secundaria, me acordaba de mis experiencias escolares y tenía una ocurrencia didáctica. Pedía a los alumnos que dibujaran correctamente, utilizando regla y compás, en cualquier paralelogramo las bisectrices de los ángulos interiores. Luego tenían que colorear el nuevo paralelogramo determinado por estas bisectrices. La actividad fue muy animada y al final hicimos una exposición de los dibujos.

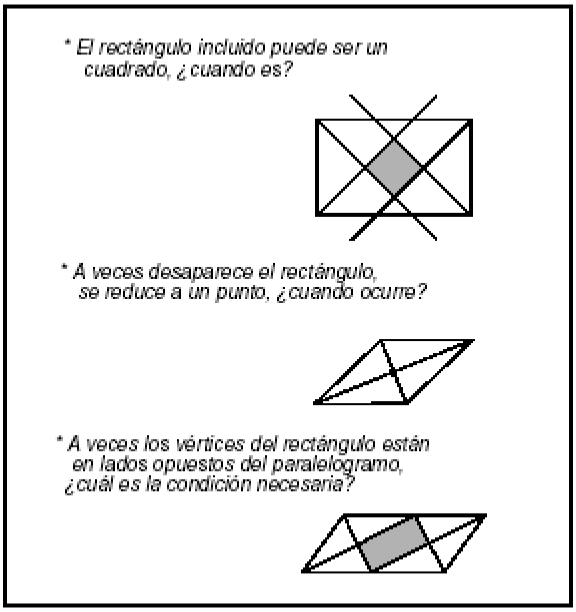


En seguida algunos alumnos formularon la conjetura: *el cuadrilátero será siempre un rectángulo* ¿Siempre? ¡Parece que sí! Sintieron la necesidad de una explicación.
Veamos. Si el cuadrilátero es un rectángulo, entonces la suma de las dos mitades de ángulos colaterales deberá sumar 90º. Necesitamos saber que la suma de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es 90º. Si ya conocen lo de la suma de los ángulos de un triángulo es fácil. En otro caso, tenemos un nuevo problema que podemos resolver construyendo un rectángulo, como ya hemos visto.
Una consecuencia es que la suma de los ángulos colaterales de un paralelogramo debe ser 180º. Esta propiedad se puede entender por traslación.

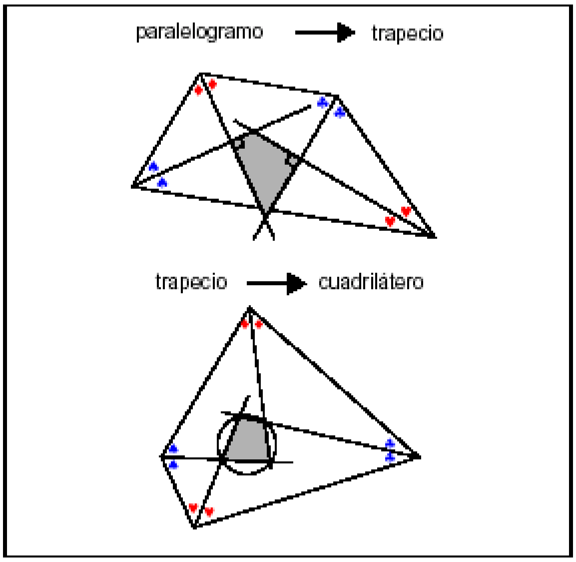


Entonces el problema se reduce a verificar dos propiedades que son más evidentes.
Este principio es el núcleo del pensamiento matemático.
Quiero llamar a esta senda la *senda de la investigación*. Es como seguir unas huellas hacia atrás, hasta donde no tenemos duda. En contraste con la *senda de la investigación*, que hemos aprendido antes y que es usual en la educación matemática universitaria.

Unos años después, mi aprendizaje de la didáctica práctica iba paso a paso, descubrí que puede ser muy atractivo experimentar primeramente con materiales concretos, por ejemplo con un paralelogramo de cartón y trazar las bisectrices doblándolo.
En esta época tenemos experiencias muy buenas con el mismo problema y con alumnos de secundaria superior. Utilizamos la computadora y el programa Cabri para que los alumnos para que los alumnos puedan experimentar y explorar propiedades geométricas. Al término de la exploración se expresa una conjetura, una hipótesis. Para su verificación seguimos la ruta hacia atrás y hemos convenido con los alumnos algunas reglas básicas, como por ejemplo, *la suma de los ángulos colaterales de un paralelogramo vale 180*º.
Freudenthal llamó a este principio ***organización local***: *los conceptos y las relaciones geométricas son analizados siempre hasta cierto límite, que es bastante arbitrario, hasta el punto en que se puede distinguir a simple vista que significan y si las relaciones son verdaderas.*
Vuelvo al problema anterior.
Como ampliación de la actividad los alumnos pueden investigar casos especiales con Cabri.
Algunas preguntas que pueden surgir.



Por otra parte, se puede sustituir el paralelogramo por otra figura más general. Si tomamos un trapecio en vez de un paralelogramo, el cuadrilátero formado por las bisectrices tiene dos ángulos opuestos de 90º. Esto significa que es un *cuadrilátero cíclico*, de un tipo especial.
Podemos investigar con cualquier cuadrilátero y algunos alumnos podrán expresar la conjetura de que, las bisectrices forman también un cuadrilátero cíclico. Es verdad. Proponemos otra vez realizar una demostración, no solo para verificar la proposición, sino también para realmente comprenderla.



El ejemplo del cuadrilátero formado por las bisectrices es paradigmático.
Nos muestra un proceso por etapas:

- **Exploración** mediante experimentación (doblar, dibujar, utilizar el ordenador).
- **Suposición** (expresar los descubrimientos, formular conjeturas).
- **Demostración** (verificar, comprender, convencerse).

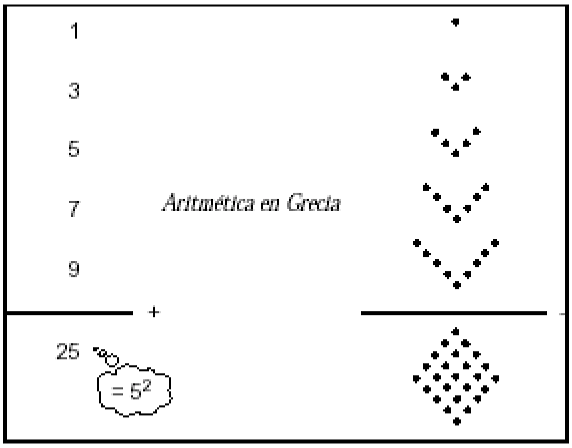
En una situación lo suficientemente rica se pueden extender las actividades con nuevas etapas de investigación:

- **Especialización**
- **Generalización.**

Según mi opinión y para evitar un malentendido, el ejemplo con las extensiones dadas requiere de una cierta madurez en los alumnos. Podría ser adecuado para alumnos de, digamos quince años, en el bachillerato superior. Sin embargo, creo que también es posible, con el mismo estilo, construir problemas para alumnos más jóvenes, problemas que les reten y les animen a conjeturar.

El campo de los números naturales

Presentará ahora un ejemplo con números naturales, un ejemplo de aritmética de la escuela pitagórica. La suma de los primeros cinco números impares (1,3,5,7 y 9) es igual al cuadrado de 5. *¿Es siempre así?* Es decir, ¿es la suma de cada fila de números impares consecutivos, a partir de 1, igual a un cuadrado?



¡Por supuesto! Si añadimos un nuevo 'número de la forma V', construimos un cuadrado mayor. Este razonamiento es absolutamente convincente para mí, y espero que para otros también. Pero en la Universidad los estudiantes deben utilizar la inducción matemática.

Por demostrar: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

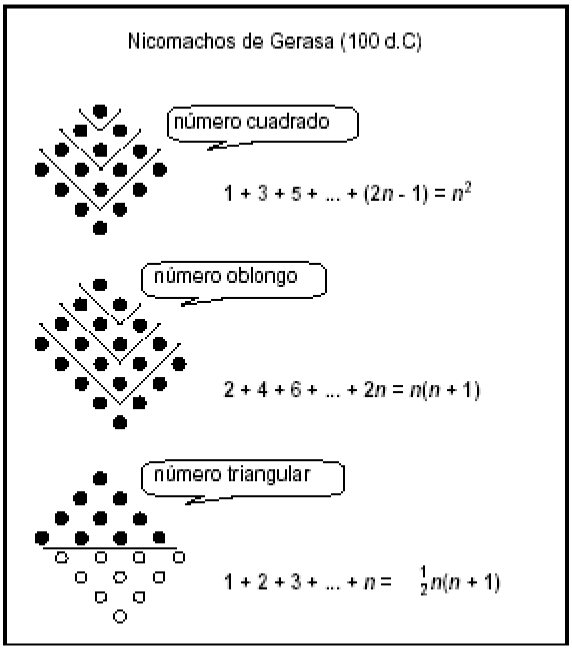
Demostración:

I. El caso $n = 2$: $1 + 3 = 4 = 2^2$

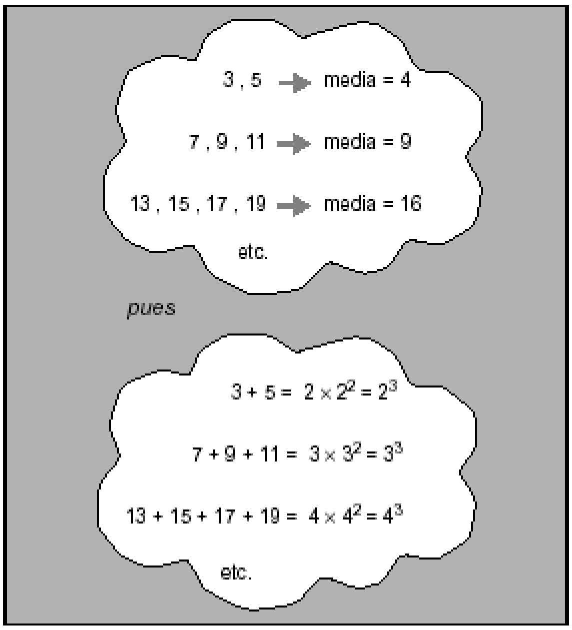
II. Sea verdad: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Pues: $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{k^2} + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

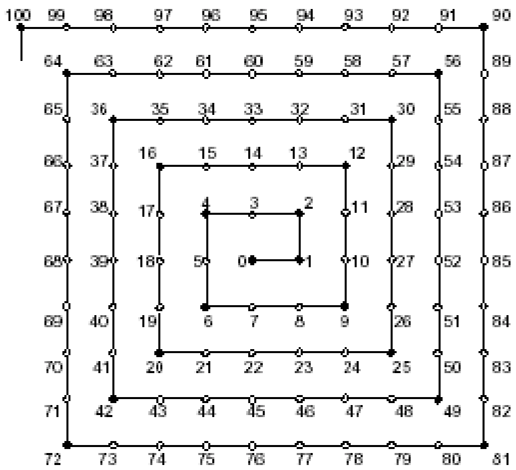
¿Es más exacta? No, es más imponente, porque es más formal.
Sin embargo, el enfoque pitagórico, me parece suficiente y preferible para la enseñanza secundaria.
El neopitagórico Nicomaco de Gerasa (100 d.C.), fue famoso por sus números poligonales. Los más conocidos son los números cuadrados, los números oblongos y los números triangulares.



Estos números son muy interesantes y permiten descubrir muchas relaciones entre ellos que dan lugar a interesantes ejercicios de demostración algebraica.
Nicomaco escribió una interesante obra denominada 'Introducción a la Aritmética' donde trata las propiedades 'maravillosas y divinas' de los números.
En ese libro faltan demostraciones, y Nicomaco se justifica alegando que *podrían aburrir a los lectores* (parece la época moderna) y además *podría perderse mucho del misterio*.
Soy por ello partidario del razonamiento y la demostración matemática, para acabar con la idea de que la matemática es magia.
Un descubrimiento famoso de Nicomaco, sin demostración, es el siguiente: *cada número cubo es la suma de números impares consecutivos.*
Veamos: $1^3 = 1$, $2^3 = 3+5$, $3^3 = 7+9+11$, $4^3 = 13+15+17+19$, etc.
¿Cómo demostrar y, de paso, desmitificar esta proposición?
Considere las medias aritméticas de los conjuntos de números impares



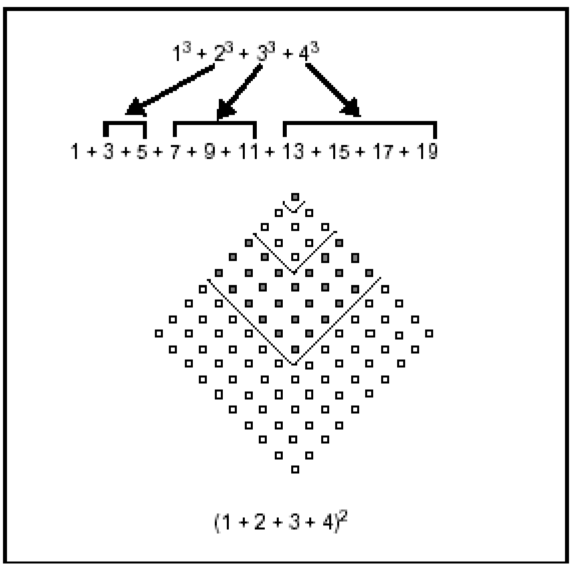
Cada vez la media es un cuadrado. Parece que sí, luego casi estamos listos. Para comprender esa propiedad utilizare la *espiral de números*.



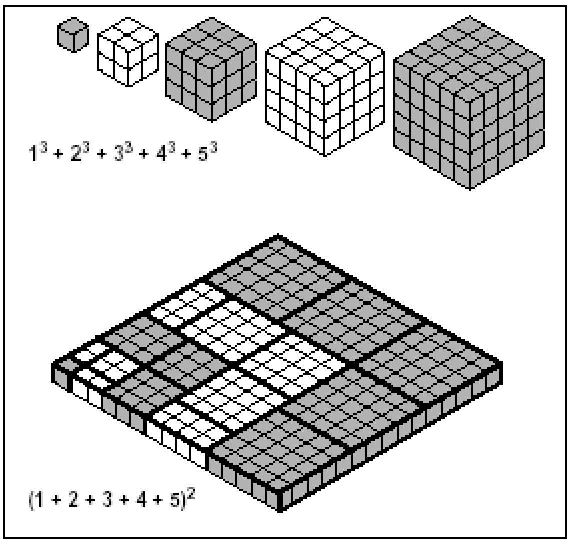
En las esquinas encontramos los *números cuadrados* y los *números oblongos*. No es difícil de entender: *¡Mire los pasos!* Cada cuadrado es la media aritmética de dos números oblongos consecutivos. Ejemplo paradigmático: 6×6 es la media de 5×6 y 6×7. Si quiere podemos dar una demostración algebraica: n^2 es la media de $(n-1)\times n$ y de $n\times(n+1)$.
Miremos ahora a las sumas 1, 3+5, 7+9+11, etc. Los términos de tales sumas caen exactamente entre dos números oblongos consecutivos. La demostración de este hecho es un buen ejercicio.
De este modo podemos entender la validez de la regla de Nicomaco.
Una consecuencia interesante de esta regla es una de las fórmulas más espectaculares de la matemática:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+...+n)^2$$

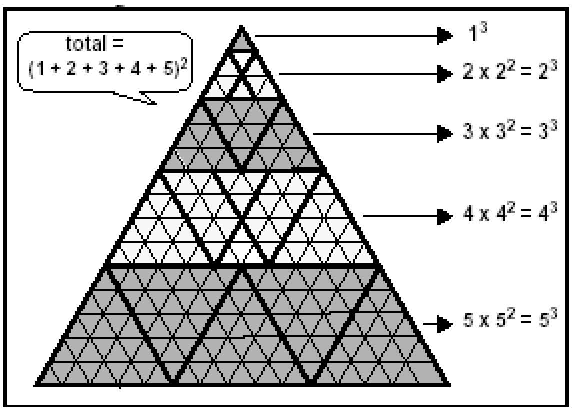
Parece increíble que Nicomaco no haya dado con esta igualdad. De cualquier forma, no aparece en su obra.



La figura explica la fórmula de manera paradigmática y visual.
Existen otras demostraciones visuales de la misma igualdad, por ejemplo:



Otra, menos conocida, que utiliza triángulos es la siguiente:



Observación: las superposiciones se compensan.
Por lo general, en los libros de textos universitarios, se exige una demostración de la fórmula para la suma de los cubos utilizando la inducción matemática. Ese método es importante en matemáticas, pero es discutible su uso en secundaria desde una perspectiva didáctica.
Una demostración por inducción aporta, sin duda, *certeza* pero quizás no aporte *comprensión* de la validez de la afirmación probada.

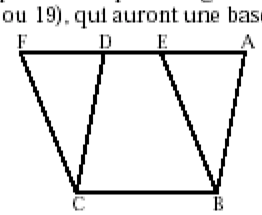
¿Demostrar o no demostrar en la enseñanza secundaria?

La demostración ha perdido mucho terreno en la enseñanza actual de la matemática en el nivel de secundaria. Más aún, con la desaparición del método euclídeo de la escena pedagógica en muchos países, no hay lugar para la demostración matemática. Parece como si el fenómeno “demostrar” fuera impropio del enfoque pragmático tan de moda en esta época.
Como reacción, en algunos países, ha surgido un interés didáctico renovado por reforzar los elementos “razonar y probar” en la educación matemática. La cuestión es: ¿Existe alguna posibilidad de que los alumnos conozcan algunas demostraciones que satisfagan el criterio de Morris Kline?
Yo pienso que sí, pero no para todos los alumnos. En mi país hemos reintroducido la demostración geométrica en el bachillerato superior y sólo para alumnos con el perfil “exacto”. Para estos alumnos proponemos la utilización del programa Cabri y la “organización local” de Freudenthal y parece que tenemos éxito.
Oficialmente, en los tres primeros años de secundaria, no ha diferencia entre los alumnos. Pero, debido al fracaso actual en la secundaria básica, muchos colegios empiezan a diferenciar a los alumnos en dos o tres perfiles a la edad de doce años. Es una reacción comprensible después de

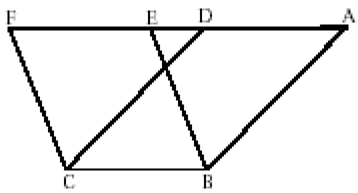
una experiencia de seis años. Un problema grave es que los alumnos sobresalientes no tenían ningún reto. Ahora tenemos nuevas ediciones de los libros de texto y cada libro presenta dos o tres niveles. Es una reacción típica del mercado de los libros de texto. Existe también un proyecto para realizar un texto digital (en internet) para los alumnos sobresalientes. Según mi opinión este desarrollo nos proporciona una oportunidad para reforzar el curriculum de matemáticas y a prestar más atención a razonar y probar, aunque sólo sea para los ‘talentosos’.
El campo de los números naturales presenta oportunidades tal y como he mostrado antes. También hay posibilidades en la combinatoria elemental. También en la llamada geometría de visión: perspectiva y sombra. Pero si uno quiere experimental el espíritu de la deducción y del método matemático, la geometría clásica parece lo más apropiado. Sin embargo, no quiero parecer un propagador de la vuelta a la geometría estilo Euclides partiendo de axiomas y definiciones. No es adecuado para los alumnos jóvenes y además requiere de mucho tiempo. Pero, quizás podríamos seleccionar un dominio geométrico que es más o menos independiente y que es atractivo para alumnos de, digamos, 14-15 años. Tal dominio existe, según mi opinión, y lo constituye las *áreas de los polígonos* culminando en el teorema de Pitágoras. Tal dominio se encuentra en los Elementos de Euclides entre las proposiciones 34 a 48.
El francés Clairaut (siglo XVIII) escribió un libro titulado ‘Élements de géométrie’ en un estilo intuitivo y con demostraciones informales. Satisface más o menos las ideas de Freudenthal sobre la organización local.
He aquí una página sobre la igualdad de las áreas de dos paralelogramos (proposición 35).

Les Parallèlogrammes qui ont une base commune, et qui sont entre les mêmes parallèles, sont égaux en superficie.

De là il suit, que tous les parallelogrammes ABCD, EBCF (fig. 18 ou 19), qui auront une base commune,

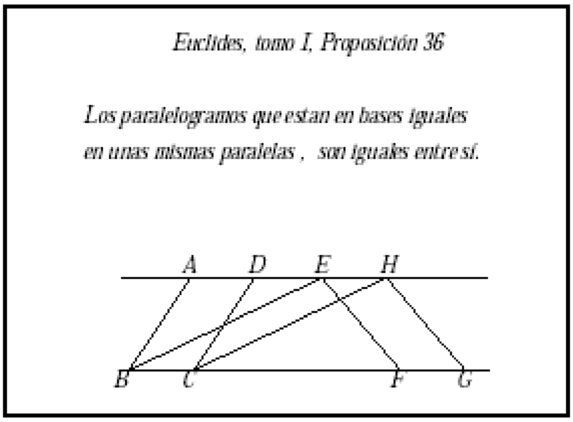


et qui se trouveront entre les memes paralleles, sertont égaux; ce qu'il est aisé de voir, même indé-pendamment de ce qui précède, en remarquant que le parallélogramme ABCD deviendra le parallélo-

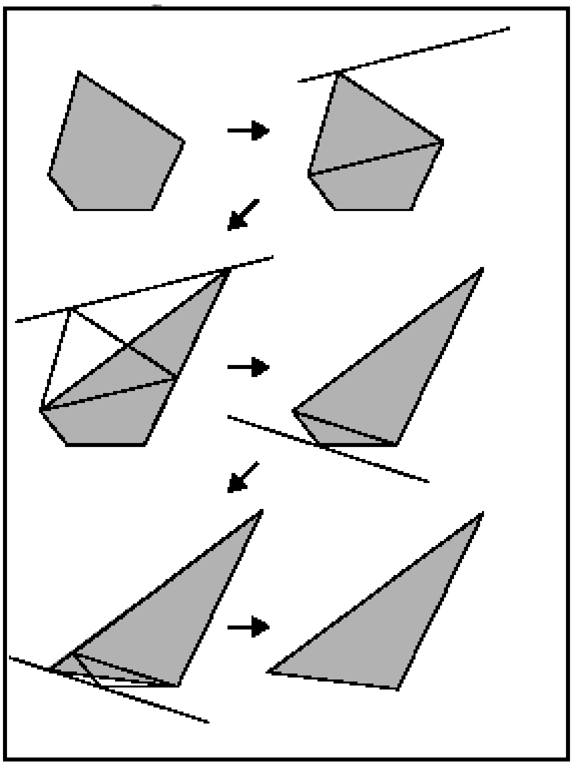


gramme EBCF, si on lui ajoute le triangle DCF, et que, de la figure entiere ABCF, on retranche le triangle ABE; qu'anisi les deux triangles DCF, ABE, étant supposés égaux, il sera évident que le parallélogramme ABCD n'aura point changé d'étendue en devenant EBCF.

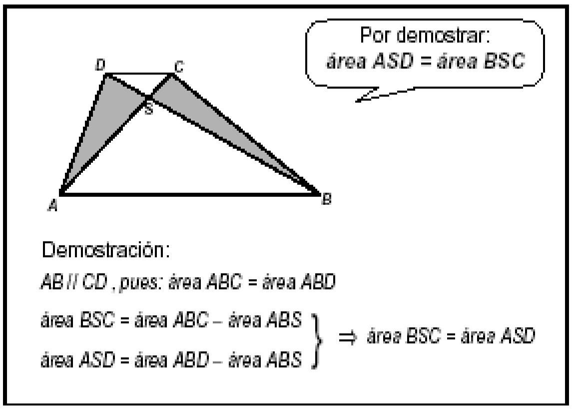
La demostración es muy sencilla y creo que los alumnos podrían realizarla. De hecho se basa en el enfoque euclídeo. Euclides continua con esta proposición:



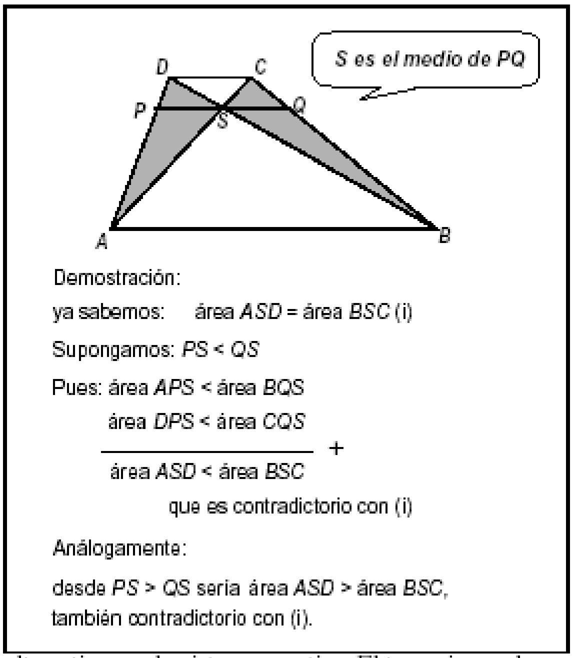
Veamos: Por la proposición 35 sabemos que los paralelogramos ABCD y EBCH tienen la misma área. Lo mismo vale para los paralelogramos EBCH y EFGH. Luego los paralelogramos ABCD y EFGH tienen la misma área.
Este es un ejemplo típico de deducción matemática.
Euclides continua con la igualdad de áreas de triángulos que “tienen iguales bases y están comprendidos entre paralelas”.
Un enfoque, más dinámico, consiste en utilizar Cabri para descubrir que el área de un triángulo no cambia si uno de sus vértices se mueve en una recta que es paralela al lado opuesto.
Esta propiedad da lugar a muchos ejercicios interesantes.
Ejemplos:
Transformar un pentágono en un triángulo conservando el área.



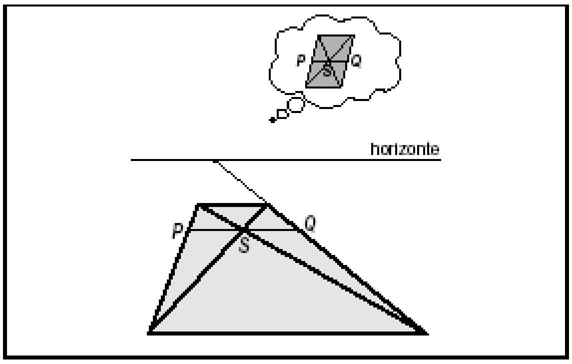
La pajarita.



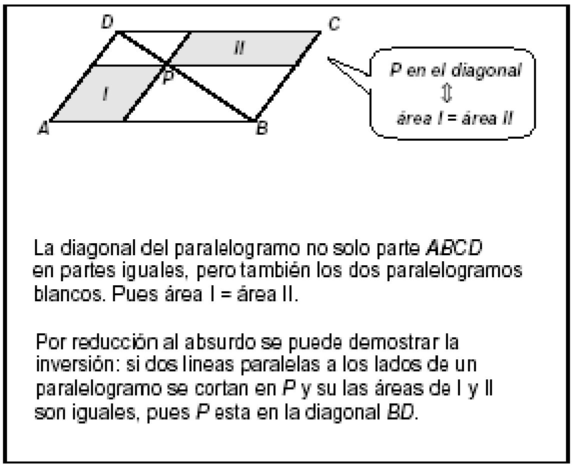
Me parece muy útil que los alumnos puedan sistematizar su razonamiento.
Este ejemplo tiene una interesante continuación. Trazamos el segmento que pasa por S y es paralelo a la base AB, que une los puntos P y Q de los lados AD y BC. Parece que S es el punto medio del segmento PQ. Se puede probar utilizando el principio de *reducción al absurdo*. Un principio injustamente olvidado en la educación matemática. De acuerdo, es difícil que los alumnos lo utilicen de forma activa, pero el gusto por tal tipo de razonamiento debe formar parte de la educación matemática de los alumnos de bachillerato.



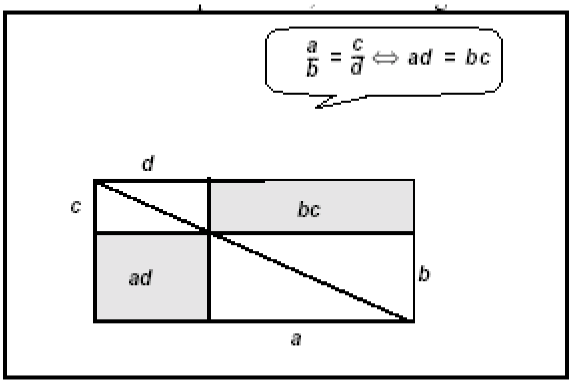
Una explicación alternativa desde la vista en perspectiva: el trapecio puede interpretarse como la vista en perspectiva de un paralelogramo, y tenemos así una demostración sin palabras:



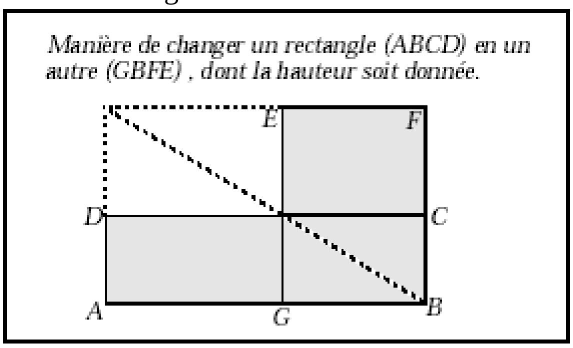
Un teorema clásico:



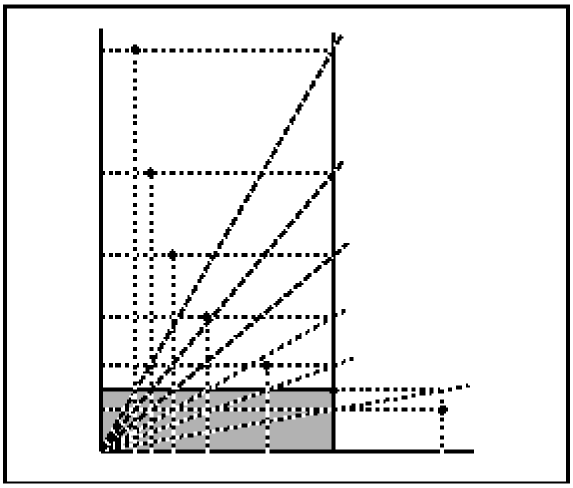
Este teorema de Euclides tiene muchas aplicaciones. Incluso en Álgebra.



Clairaut, imitando a Euclides, usa el teorema para construir un rectángulo con altura dada y cuya área sea igual a la de otro rectángulo dado.



Esto proporciona la oportunidad de construir puntos de una hipérbola ortogonal.



Si se aplica la construcción análoga, pero para paralelogramos, se obtiene la hipérbola oblicua.
El tema de la igualdad de las áreas es rico y concreto. Hay muchas aplicaciones geométricas y conexiones con otras partes de la matemática. Además proporciona la oportunidad de explorar y probar con Cabri.
Por último quiero mencionar una publicación muy interesante del sudafricano Michele de Villiers: “ Rethinking Proof with the Geometer’s Sketchpad”. El autor, que ha basado sus ideas en la teoría de van Hiele, discute seis funciones de la demostración: *explicación, descubrimiento, verificación, desafío intelectual, sistematización* y *comunicación.* Podríamos añadir *comprensión* y *desmitificación*.
He hablado sobre estos aspectos de forma más o menos implícita.
En mi opinión los aspectos más importantes para la educación matemática son la *comprensión* y el *desafío intelectual*. Una condición necesaria para lograr enseñar demostraciones es conseguir una esfera activa de trabajo, con muchas oportunidades de explorar e investigar. Si un alumno descubre cierta propiedad por si mismo, estará más motivado hacia su comprensión y hacia la búsqueda de una demostración convincente.

Martin Kindt, es investigador y profesor en el Freudenthal Institute de la Universidad de Utrecht. Su interés es la educación matemática, la historia de la matemática y la geometría.
Dirección electrónica: martín@ull.es

Publicado en: **Números. Volumen 50, junio 2002, pp 3-18.**
(Arreglos para la versión castellana realizados por Juan Antonio García Cruz)