ANALISIS MATEMATICO VI. Tema IV: Sucesiones y series de funciones analíticas

Curso 2003-2004

1. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}z^{3n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n} \quad d)\ \sum_{n=0}^{\infty}(n!)z^n$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^n z^{n^2} \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n})^n z^n \quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+a^n)z^n$$

2. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ converge en todo punto del círculo unidad excepto en $z=1$. [1]

3. Probar que la serie de potencias
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}$$
tiene radio de convergencia 1. Estudiar la convergencia en $\{|z|=1\}$. [2].

4. Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ en $D=D(z_0,\rho)$. Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}a_n(z-z_0)^{n+1}$ también converge en D a una primitiva de f. Así mismo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}na_{n-1}(z-z_0)^{n-1}$ converge en D definiendo la derivada de f.

5. Hallar el desarrollo en serie en el origen de las siguientes funciones, determinar también sus radios de convergencia: a) $f(z)=(1-z)^{-2}$; b) $f(z)=\mathrm{Log}(1+z^2)$.

6. Hallar el desarrollo en serie en el punto que se indica de las siguientes funciones, determinar también sus radios de convergencia: a) $f(z)=z/(z-1)^2$, $z_0=0$; b) $f(z)=(2z-4)/(z-3)^2$, $z_0=2$.

7. ¿En qué coronas de centro $z_0=-1$ es holomorfa la función
$$f(z)=\frac{7z-2}{z(z-1)(z-2)}?.$$
Determinar sus desarrollos de Laurent en cada recinto.

8. Obtener el desarrollo de Laurent en $z_0=0$ de $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z+2}$.

9. Determinar el desarrollo de Laurent de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$a)\ f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3},\ z_o=1 \qquad b)\ f(z)=(z-3)\mathrm{sen}\,\frac{1}{(z+2)},\ z_o=-2$$

$$c)\ f(z)=\frac{z-\mathrm{sen}\ z}{z^3},\ z_o=0 \qquad d)\ f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)},\ z_o=-2$$

$$f)\ f(z)=\frac{1}{z^2(z-3)^2},\ z_o=3$$

10. Desarrollar $f(z)=(z+1)^{-1}(z+3)^{-1}$ en serie de potencias en las siguientes regiones: a) $1<|z|<3$, b) $|z|>3$, c) $0<|z+1|<2$.

11. Desarrollar $f(z)=z^{-1}(z-2)^{-1}$ en serie de potencias en las siguientes regiones: a) $0<|z|<2$, b) $|z|>2$.

12. Desarrollar $f(z)=(z+1)^{-1}(z+3)^{-1}$ en serie de potencias en $|z+3|>2$.

---

[1] AYUDA: Demostrar que si $A_n := \sum_{k=1}^{n}a_k$ es acotada y $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente y convergente a cero, entonces $\sum a_nb_n$ es convergente.

[2] AYUDA: Aplicar la ayuda del Problema 2