ANALISIS MATEMATICO VI. Tema III: El Terorema de Cauchy

Curso 2003-2004

1. Describir los siguientes caminos indicando si son simples, cerrados y su regularidad.

   a) $\gamma(t) = t^2 + it^4, \ -1 \leq t \leq 1$ b) $\gamma(t) = e^{it^2}, \ 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$

   c) $\gamma(t) = t^3 + i|t|^3, \ -1 \leq t \leq 1$ d) $\gamma(t) = e^t + ie^{-t}, \ 0 \leq t \leq 1$

2. Sean f, g dos funciones continuas, c_1, c_2, dos constantes y $\gamma, \ \gamma_1, \ \gamma_2$ curvas regulares a trozos. Demostrar que

   (a) $\displaystyle\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$

   (b) $\displaystyle\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f.$

   (c) $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$

3. Demostrar que si β es una reparametrización[1] de γ, entonces

$$\int_\gamma f = \int_\beta f$$

   para cualquier función continua f definida en un abierto conteniendo la imagen de γ=imagen de β.

4. Dados los caminos α, β y γ definidos en [0,1] por $\alpha(t) = t + it$, $\beta(t) = t + it^2$ y $\gamma(t) = t^2 + it$. Determinar las parametrizaciones de $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ y $\alpha - \beta + \gamma$.

5. Si $\gamma(t) = te^{it}, \ 0 \leq t \leq \pi$, calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ b) $\int_\gamma |z|\, |dz|$ c) $\int_\gamma z\, dz$

6. Si $\gamma(t) = [e^{2\pi}, 1] + e^{t+it}, \ 0 \leq t \leq \pi$, calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_\gamma z^{-1}\, dz$ b) $\int_\gamma |z|^{-1}\, |dz|$ c) $\int_\gamma e^z\, dz$

7. Probar que para todo caminos regular a trozos γ y toda función continua en γ se verifica $\int_\gamma f(z)\, |dz| = \int_{-\gamma} f(z)\, |dz|$.

8. Demostrar[2] que si f es una función anlítica definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante en Ω.

9. Sea γ la mitad de la circunferencia unidad superior. Probar que

$$\left| \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e$$

[1] Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regular a trozos. Se dice que $\beta : [a', b'] \to \mathbb{C}$ es una *reparametrización de* γ si existe una función de clase C^1, $\alpha : [a, b] \to [a', b']$ con $\alpha'(t) > 0$, $\alpha(a) = a'$ y $\alpha(b) = b'$ tal que

$$\gamma(t) = \beta(\alpha(t))$$

[2] Unsando el Teorema fundamental del cálculo

10. Sea γ la circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio r. Calcular la integral

$$\int_\gamma (z-a)^n dz$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

11. Si $\gamma(t) = e^{1+it}$, $0 \leq t \leq \pi$, probar que

$$\left| \int_\gamma (\text{Log} z)^{-1}\, dz \right| \leq e\text{Log}(\pi + \sqrt{\pi^2+1}).$$

12. Para $a, b > 0$, probar que

$$\left| \int_0^{a+ib} \cos(z^2)\, dz \right| \leq \frac{(a^2+b^2)^{1/2}\sinh\,(2ab)}{(2ab)}.$$

13. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ verificando $a < b$, y para todo $c \in \mathbb{R}$ sea $I(c) = \int_{c+ia}^{c+ib} e^{-z^2}\, dz$. Deducir que $I(c) \to 0$ cuando $c \to \pm\infty$.

14. Para $b > 0$, probar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2b\pi t)\, dt = \sqrt{\pi} e^{-b^2\pi^2}$. [3]

15. Calcular: (i) $\int_{|z|=1} \sqrt{9-z^2}\, dz$; (ii) $\int_{|z|=1} (z^2+2z)^{-1}\, dz$; (iii) $\int_{|z+i|=3/2} (z^4+z^2)^{-1}\, dz$.

16. Si $\gamma(t) = 2\cos t + i\text{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular las siguientes integrales:
a) $\int_\gamma \text{sen}(z^2)\, dz$ b) $\int_\gamma z^{-1}\, dz$ c) $\int_\gamma (z^2+2iz)^{-1}\, dz$. [4]

17. Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ donde $\gamma_1(t) = e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, $\gamma_2(t) = -1 + 2e^{-2it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, y $\gamma_3(t) = 1 - i + e^{it}$ $(\pi/2 \leq t \leq 9\pi/2)$. Determinar los valores de $n(\gamma, z)$ para todos los puntos de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.

18. Calcular: i) $\int_{|z|=1} z^{-1}\text{Log}(z+e)\, dz$; (ii) $\int_{|z-2|=3/2} (z^2-1)^{-1}\text{Arctg}\, z\, dz$; (iii) $\int_{|z|=2} (z+1)^{-2} e^z\, dz$.

19. Sea $\gamma = [-1, 1+i] + \beta + [-1+i, 1]$, donde $\beta(t) = i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 3\pi$. Calcular $\int_\gamma (z^2+1)^{-1}\, dz$.

20. a) Para $r > 0$ sea $I(r) = \int_{\gamma_r} z^{-1} e^{iz}\, dz$ donde $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Probar que $I(r) \longrightarrow 0$ cuando $r \to \infty$ y $I(r) \longrightarrow \pi i$ cuando $r \to 0$.[5]
b) Probar que $\int_0^\infty t^{-1}\text{sen} t\, dt = \pi/2$. [6]

21. Sea $f = u + iv$ una función entera que verifica $u_x v_y - u_y v_x = 1$ en todo el plano complejo. Demostrar que f es de la forma $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $|a| = 1$.

22. Sea $f = u + iv$ una función entera que verifica $u_x + v_y = 0$ en todo el plano complejo. Demostrar que f es de la forma $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y Re $a = 0$.

23. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Definimos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ por $f(z) = (z-1)/\text{Log} z$ si $z \neq 1$ y $f(1) = 1$. Probar que esta función es analítica.

---

[3] AYUDA: Considerar $\int_{\partial R} e^{-z^2} dz$ con R el rectángulo de vértices $-c, c, c+b\pi i, -c+b\pi i$ y el ejercicio anterior. Utilizar que

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[4] AYUDA: Para b) pensar en $\int_{|z|=1} z^{-1}\, dz$

[5] AYUDA: Para la segunda parte probar primero que $\int_{\gamma_r} z^{-1}(e^{iz}-1)\, dz \longrightarrow 0$ cuando $r \to 0$.

[6] AYUDA: Para $0 < s < r < \infty$ considerar $\int_\gamma z^{-1} e^{iz}\, dz$ donde $\gamma = [s, r] + \gamma_r + [-r, -s] - \gamma_s$ y $\gamma_r(t) = re^{it}$, $\gamma_s(t) = se^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$.

24. Calcular las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_{|z-2i|=3/2} \frac{\text{arcsen } z}{(z-i)^3}\, dz$ b) $\displaystyle\int_{|z-2|=3/2} \frac{\text{Log}(1+z)}{(z^2-1)^2}\, dz$

    c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^k}{(z-1)^{k+1}}\, dz \quad (k \in \mathbb{N})$ d) $\displaystyle\int_{\partial Q} \frac{\text{sen}(\pi z)}{(z^3+z^2)^1}\, dz$ con Q el cubo de vértices $2, 2i, -2, -2i$.

25. Sea f una función analítica en un dominio convexo A y $|f'(z)| \leq m$ para todo z de A. Probar que $|f(z_1) - f(z_2)| \leq m|z_1 - z_2|$ se verifica para todo par de puntos de A.

26. Si una función f es analítica en un dominio convexo A y si $\text{Re}f'(z) \neq 0$, entonces f es inyectiva en A.

27. Una función analítica en $\mathbb{D}$ verifica $f(0) = 0$ y $|f'(z)| \leq c(1-|z|)^{-n-1}$ en todo el disco con n un entero no negativo y $c > 0$. Probar que $|f(z)| \leq cn^{-1}(1-|z|)^{-n}$ si $n \geq 1$ y $|f(z)| \leq c\text{Log}[(1-|z|)^{-1}]$ si $n = 0$.

28. Teorema de Gauss-Lucas: Sean $z_1, z_2, .., z_n$ las raíces del polinomio $p(z)$. Probar que toda raíz ζ de $p'(z)$ puede escribirse de la forma

$$\zeta = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n, \quad \text{donde } \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \geq 0, \ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1.$$

    Se dice que las raíces de $p'(z)$ pertenecen a la envolvente convexa de $\{z_1, ..., z_n\}$.

29. Probar la siguiente generalización del Lema de Schwarz. Sea f una función analítica en $D = D(z_0, r)$ y $m > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| \leq m$ para todo $z \in D$. Probar que $|f'(z_0)| \leq m/r$ y $|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{m}{r}|z - z_0|$ para todo $z \in D$.