ANALISIS MATEMATICO VI. Tema II: Funciones holomorfas

Curso 2003-2004

1. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio G, determinar tras el cambio a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\mathrm{sen}\theta$ la expresión en estas coordenadas de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

   Dar la expresión de $f'(z)$ en función de las derivadas parciales de r y θ.

2. Determinar dónde admiten derivada las siguientes funciones. Hallar el conjunto donde son analíticas.

a) $f(z) = \bar{z}$	b) $f(z) = x^2 - y^2 - i2xy$	c)$f(z) = z^{10}$
d) $f(z) = z^{-5}$	e) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(2xy + x^2 - y^2)$	f) $f(z) = x$
g) $f(z) = e^x \cos y - ie^x \mathrm{sen} y$	h) $f(z) = \cos x + i\mathrm{sen} y$	i) $\tan z$
j) $f(z) = z + z^{-1}$	k) $f(z) = -xy + \frac{i}{2}(x^2 - y^2)$	l) $f(z) = (y+1)^2 + i(x+1)^2$
m) $f(z) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\mathrm{sen}(2xy))$	n) $f(z) = \frac{z^2}{e^z}$	ñ) s) $f(z) = 3ze^{iz} + \lvert z\rvert^2 + 4$
o) $f(r,\theta) = r^4\mathrm{sen}4\theta - ir^4\cos 4\theta$	p) $f(r,\theta) = r^2\cos^2\theta + ir^2\mathrm{sen}^2\theta$	q) $f(r,\theta) = \ln r^2 + i2\theta$

3. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en un dominio G y cuya función derivada es también analítica en G. Determinar la expresión de $f''(z)$.

   ¿Qué condiciones adicionales a las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos asegurar que verifican en este caso u y v?

4. Probar la *Regla de L'hôspital* para funciones complejas:

   Si f y g son dos funciones diferenciables en z_0 tales que $f(z_0) = 0 = g(z_0)$ y $g'(z_0) \neq 0$ entonces
   $$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

5. Calcular los siguientes límites:
   $$a)\ \lim_{z\to 1} \frac{z^2+z-2}{z^{16}-1} \qquad b)\ \lim_{z\to i} \frac{z^9+z-2i}{z^{15}+1} \qquad c)\ \lim_{z\to 0} \frac{e^{\beta e^z} - e^\beta}{e^{iz}-1}$$

6. Sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ calcular:
   $$a)\ \lim_{z\to 0} \frac{f(2z)}{z} \quad b)\ \lim_{z\to 0} \frac{f(z^2)}{z} \quad c)\ \lim_{z\to i} \frac{f(z^2+1)}{z-i}$$

7. Probar que $f(z) = \overline{z}$ no es analítica.

8. Probar el *Teorema de la aplicación conforme.* Si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función analítica y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme[1] en z_0 con $\theta = Arg f'(z_0)$ y $r = |f'(z_0)|$.

9. Determinar el ángulo con el que es rotada por la función $f(z) = z^2$ toda curva que pase por el punto: a) $z_0 = i$; b) $z_0 = 1 + i$.

[1]Una aplicación $f : A \to \mathbb{C}$ se llama *conforme en* z_0 si existe $\theta \in (-\pi, \pi]$ y $r > 0$ tal que la curva $\gamma : [0,1] \to A$ es diferenciable en $t = 0$, con $\gamma(0) = z_0$, y verifica que $\gamma'(0) \neq 0$, la curva $\sigma(t) := f(\gamma(t))$ es diferenciable en $t = 0$ donde $|\sigma'(0)| = r|\gamma'(0)|$ y $arg\sigma'(0) = arg\gamma'(0) + \theta$. Una aplicación se dice *conforme* cuando es conforme en todo punto.

10. Estudiar el comportamiento infinitesimal de $f(z) = z^3 + 1$ en $z_0 = i$.

11. Probar que si f y f' son analíticas en un abierto A y $f = u + iv$, entonces u y v son funciones armónicas[2] en A.

12. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio G verificando que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ y que $f(\bar{z})$ es analítica en G. Probar que f es constante.

    Utilizar este argumento para asegurar que $f(z) = (\bar{z})^3 + \bar{z}$ no es analítica en ningún punto.

13. ¿Existe alguna función f analítica en $\mathbb{C}$ que verifique $\mathrm{Re}f(z) = x - 2y^2$?

14. Determinar la función entera $f(z)$ que verifique $\mathrm{Re}f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2$, $\mathrm{Re}f(0) = 6$ y $f(1+i) = 0$.

15. Estudiar la diferenciabilidad de la función $\sqrt[3]{z}$.

16. Si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones analíticas en un dominio G tales que $f'(z) = g'(z)$ en todo punto de G, probar que entonces f y g difieren en una constante.

    Utilizar este resultado para probar que si $f'(z) = a \in \mathbb{C}$ para todo z, entonces $f(z) = az + b$.

17. Sea f una función analítica en un dominio G y que verifica $\mathrm{Arg}[f(z)] = \alpha \in \mathbb{R}$ para todo $z \in G$ donde $f(z) \neq 0$. Probar que f es constante.

18. Sea $f(z) = u + iv$ una función analítica en un dominio G tal que $v(z) = (u(z))^2$. Probar que f es constante.

19. Sea $f = u + iv$ una función entera verificando $u_x v_y - u_y v_x = 1$ en todo el plano complejo y f' analítica. Probar que f es de la forma $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $|a| = 1$.

20. Sea f una función analítica en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < 1\}$ tal que $Ref(z) = 3$ para todo $z \in D$. Demostrar que f es constante en D.

21. Sea
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

    (a) Probar que $f(z)/z$ no tiene límite cuando $z \to 0$.

    (b) Si $u = Ref$ y $v = Imf$, probar que $u(x,0) = x$, $v(0,y) = y$, $u(0,y) = v(x,0) = 0$.

    (c) Demostrar que las parciales de u y v existen y que verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (0,0).

22. Probar las siguientes relaciones:

    a) $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ b) $\mathrm{sen}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \mathrm{sen} z_2$
    c) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \mathrm{sen} z_1 \mathrm{sen} z_2$ d) $\mathrm{sen}^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$

23. Determinar los complejos tales que $\mathrm{sen} z - \cos z = 0$.

24. Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

    a) $e^z = e^{2+i}$ b) $e^z = e^{2z}$ c) $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$
    d) $(e^z - 1)^2 = e^z$ e) $(e^z - 1)^3 = 1$ f) $e^{e^z} = 1$
    g) $\cos z = \frac{1}{2}$

[2] Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $u : A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que u es *armónica* si
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$
La expresión $\nabla^2 u$ se denomina *Laplaciano* de u.

25. Sea la rama del logaritmo definida por $f(z) = \log z = \ln|z| + i\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Determinar su dominio de analiticidad. Calcular $f(-e^2)$. ¿Podemos dar un valor de $f(e^2)$ para esta rama analítica?

26. Considérese la rama analítica del logaritmo en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x = 0,\ y \leq 0\}$. Si esta rama asigna $log(-1) = i\pi$, se pide hallar: a) $\log 1$; b) $\log(ie)$; c) $log(-e-ie)$.

27. Considérese la rama analítica del logaritmo en dominio $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x = y,\ y \leq 0\}$. Si esta rama asigna $\log 1 = i2\pi$, se pide hallar: a) $\log i$ b) $\log(\sqrt{3}+i)$ c) $log(-\sqrt{3}+i)$.

28. Sea la función $f(z) = \mathrm{Log}(z-i)$. a) Determinar el dominio de analiticidad de esta función.

    b) Hallar $f(-i)$.

    c) Explicar por qué $g(z) = f(z)/(z-2i)$ tiene una singularidad en el dominio de analiticidad de $f(z)$, pero $h(z) = f(z)/(z+2-i)$ sí es analítica en este dominio.

29. Determinar el dominio de analiticidad de $f(z) = \mathrm{Log}(z^2+1)$.

30. Calcular $f'(z_0)$, considerando la rama principal, para: a) $f(z) = z^{1/4}$, $z_0 = i$; b) $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = -9i$; c) $f(z) = z^z$, $z_0 = i$; d) $f(z) = z^{\mathrm{sen} z}$, $z_0 = i$; e) $f(z) = i^{e^z}$, $z_0 = i$.

31. Si $f(z) = z^{1/2}$ es la rama definida en $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x = 0,\ y \leq 0\}$ y $f(4) = -2$, hallar: a) $f(9)$; b) $f(-1-i)$; c) $f(9-i9\sqrt{3})$.

32. Hallar $f'(i)$ si $f(z) = i^{e^z}$ y se usan valores principales.

33. Calcular $f'(-64i)$ si se emplea la rama principal de $f(z) = z^{7/6}$.

34. Sea $f(z) = 10^{e^z}$. Esta función se evalúa de manera que $|f(i\pi/2)| = e^{-2\pi}$. Hallar $f'(z)$ y $f'(i\pi/2)$.

35. Determinar explícitamente las funciones trigonométricas inversas arcsen z y arccos z. Hallar sus derivadas.

36. Probar que arcsen z +arccos $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

37. ¿En cuál de los siguientes dominios puede definirse una rama del logaritmo?

    a) $D = \{z : x+y < 0\}$ b) $D = \{z : 1 < |z| < e\}$ c) $D = \{z : 1 < |z| < e\} \setminus \{ti : 1 < t < e\}$

    d) $D = \{z : 0 < y-x < 1\}$ e) $D = \{z : 0 < |x|+|y| < 1\}$

38. Sea $D = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{e^{t+it} : -\infty < t < \infty\})$ y $L(z)$ la rama del logarítmo en D que verifica $L(e) = 1$. Calcular: a) $L(e^6)$; b) $L(-e^8)$; c) $L(ie^{\pi k})$, $k \in \mathbb{Z}$.

39. Calcular la derivada y dar la región donde es analítica las siguientes funciones:

    (a) e^{e^z}

    (b) $\sin(e^z)$

    (c) $\sqrt{e^z+1}$

40. Calcular ∂f y $\overline{\partial} f$ para las siguientes funciones.

    a) $f(z) = 2x^3y + i(x^2-y)$ b) $f(z) = 3z^2 + e^{\bar{z}} + z|z|^4$

    c) $f(z) = \mathrm{Log}(1-|z|^2)$ d) $f(z) = \sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}$