ANALISIS MATEMATICO VI. Tema I: Introducción Curso 2003-04

1. Si $z = 1 + 2i$ y $w = 3 + 4i$, expresar en forma binómica los siguientes números complejos: $3z + iw$, $2z^2 - z\overline{w}$, $2|w| + (1 - i)z^2$, $(w + z)/(w - z)$, $(1 - iz)/(1 + iz)$, $(z + 5z^{-1})^{-1}$, $Im(\overline{z}w^2) + 25iRe(zw^{-1})$, $5\cos[Arg(z^2)] + 5i\sin[Argw]$.

2. Para $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrarios, ¿cuáles de las siguientes expresiones son ciertas?

   a) $\frac{Rez}{Rew} = Re(\frac{z}{w})$ *b)* $Im(\frac{1}{z\overline{w}}) = Im(\frac{1}{\overline{z}w})$ *c)* $\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = 2Re(\frac{1}{z})$

   d) $z\overline{w}(\overline{z} + w) = \overline{\overline{z}w(z + \overline{w})}$ *e)* $Im(\frac{1}{z\overline{z}}) = -Im(\frac{1}{z\overline{z}})$ *f)* $Re(\frac{1}{z\overline{w}}) = Re(\frac{1}{\overline{z}w})$

3. Expresar en forma polar los siguientes complejos:

$$(a)\ \frac{(1+i)(2)_{3\pi/4}}{(3)_\pi} \quad (b)\ \frac{3e^{i\pi/2}}{(1+i)4e^{i5\pi/6}} \quad (c)\ \frac{(e^{i\pi/6})^4}{(e^{-i\pi/6})^4}$$

4. Expresar en forma binómica y polar los siguientes complejos:

   a) $(\sqrt{3} + i)^8$ b) $(-1 - i)^{-13}(-\sqrt{3} - i)^{13}$ c) $\sqrt{i}$

   d) $\sqrt[3]{-1 + i}$ e) $\sqrt[4]{-1}$ f) $(1 - i\sqrt{3})^{-1/3}$

   g) e^{3+4i} h) $e^{\frac{1}{1-i}}$ i) $\sin(1 - 2i)$

5. Sea $a, b \in \mathbb{C}$. Probar la *Indentidad del paralelogramo*

$$|a - b|^2 + |a + b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

6. ¿Cuándo se da la igualdad en

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|?$$

7. Sea $z = x + iy$. Demostrar

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|.$$

8. Probar que
   (a) $arg\overline{z} = -argz$
   (b) $arg\frac{z}{w} = argz - argw$
   (c) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$

9. Demuestra que si $z = (\rho)_\theta$ entonces $z^{-1} = (\frac{1}{\rho})_{-\theta}$. Además si $z_1 = (\rho_1)_{\theta_1}$ y $z_2 = (\rho_2)_{\theta_2}$ ¿Cómo sería en polares $\frac{z_1}{z_2}$?

10. Expresar $\cos 3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\sin\theta$.

11. $z^{\frac{1}{m}}$ y $z^{\frac{-1}{m}}$ tienen m valores cada uno. ¿Es cierto para todos estos valores que $z^{\frac{1}{m}}z^{\frac{-1}{m}} = 1$? Estudiar cuando es posible.

12. Probar que $1 + z + \cdot\cdot + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$ se verifica para todo complejo $z \neq 1$ y todo natural n.

13. Sea ω una raiz enésima de la unidad siendo $\omega \neq 1$. Probar

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$$

14. Probar que $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\bar{w})$. Apoyándose en esta relación y para cualquier $z \neq 0$ y $w \neq 0$, probar que $|z+w| = |z| + |w|$ si, y solo si, $w = tz$ para algún $t > 0$.

15. Probar la identidad trigonométrica de Lagrange
$$1 + \cos\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$
Suponiendo que $sen\frac{\theta}{2} \neq 0$.

16. Escribir la ecuación de una recta, circunferencia y elipse usando notación compleja.

17. Describir geométricamente los siguientes conjuntos del plano complejo $\mathbb{C}$:

(i) $\{z \ : \ \lvert z-1\rvert = \lvert z-i\rvert\}$	(ii) $\{z \ : \ \lvert z-1\rvert = 2\lvert z-i\rvert\}$	(iii) $\{z \ : \ \lvert z-1\rvert = x\}$
(iv) $\{z \ : \ (1+i)z + (1-i)\overline{z} = 1\}$	(v) $\{z \ : \ z\overline{z} + iz - i\overline{z} - 3 = 0\}$	(vi) $\{z \ : \ \lvert z-i\rvert + \lvert z+i\rvert = 4\}$
(vii) $\{z \ : \ Argz = \pi/4\} \cup \{0\}$	(viii) $\{z \ : \ \lvert Argz - Argi\rvert < \pi/6\}$	(ix) $\{z \ : \ \lvert Arg(z-i)\rvert < \pi/6\}$

18. Comprobar que $2Arg(1+z) = Argz$ para $|z| = 1$ salvo $z = -1$.

19. Probar que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Probar también que, salvo para valores de z reales negativos, $\overline{\mathrm{Log}z} = \mathrm{Log}\overline{z}$ y $\overline{z^\lambda} = \overline{z}^{\overline{\lambda}}$. ¿Qué ocurre en las últimas expresiones para valores de z reales negativos?.

20. Expresar en forma binómica los siguientes complejos: $\mathrm{Log}(-e^2)$, $\mathrm{Log}(1 - i\sqrt{3})$, $(-1)^i$, $i^{\mathrm{Log}i}$, $(-e)^{\pi i}$, $(ie^{\pi/2})^i$.

21. Determinar la parte real e imaginaria, como funciones de x e y, de las siguientes funciones de variable compleja: $f(z) = z^3 - iz$, $f(z) = z^2 - 2i\overline{z}^2 + 1$, $f(z) = ze^z + z^{-1}e^{-z}$, $f(z) = \overline{z}e^z - ze^{\overline{z}}$.

22. Clasificar cada uno de los siguientes conjuntos como abiertos, cerrados o ninguno de los dos tipos: $A = \{z \ : \ -\pi < Imz \leq \pi\}$, $B = \{z \ : \ 1 < |z| < 2\}$, $C = \{z \ : \ |Rez| + |Imz| \leq 1\}$, $D = \{z \ : \ 0 < \max\{x,y\} \leq 1\}$, $E = \{z \ : \ y > x^2\}$.

23. Determinar la clausura, frontera e interior de los conjuntos del ejercicio anterior.

24. Clasificar los siguientes conjuntos como conexos o disconexos: $A = \{z \ : \ |z| > 1\}$, $B = \{z \ : \ |z-i| \neq 1\}$, $C = \{z \ : \ x^2 - y^2 = 0\}$, $D = \{z \ : \ x^2 - y^2 < 1\}$, $E = \mathbb{C} \setminus \{z \ : \ Rez, Imz \in \mathbb{Q}\}$.

25. Determinar las componentes de los siguientes conjuntos: $A = \{z \ : \ |x| + |y| \neq 1\}$, $B = \{z \ : \ e^z \notin \mathbb{R}\}$.

26. Determinar los puntos de acumulación de las siguientes sucesiones: (i) $z_n = n^{-1} + (-1)^n$; (ii) $z_n = 2^{-n} + (-1)^n + i^n$; (iii) $z_n = [2 + \cos(n\pi)]e^{n\pi/5}$; (iv) $z_n = \sin(n\pi/2) + i\cos(n\pi/6)$; (v) $z_n = n\sin(n\pi/2) + i\cos(n\pi/6)$.

27. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{z\to i}[2z^2 - iz^3 + zArg\overline{z}]$ b) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^4+1}{z+i}$ c) $\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z^4-1}{z+i}$

d) $\displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{z^2 - iz + 2}{z^2+4}$ e) $\displaystyle\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z}-1}{z-1}$ f) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z + z\mathrm{Log}z}{1 - z^2Argz}$

g) $\displaystyle\lim_{z\to 0} e^{-1/z^2}$