CAPÍTULO V
ANÁLISIS MATEMÁTICO V
TEORÍA CUALITATIVA

V. 1. Ecuaciones autónomas

Una ecuación de la forma,

$$x' = f(x), \tag{1}$$

(el “tiempo” t no aparece en el segundo miembro) se llama ecuación autónoma. A lo largo del capítulo supondremos que

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es de clase C^1 . Recuérdese que ello conlleva que para cada $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{P}$$

admite una única solución maximal (x, I) , definida en un intervalo abierto $I = (\alpha, \omega)$. Siempre representaremos así dicho intervalo. Por otra parte, dicha solución se representará $x = x(t, t_0, x_0)$.

Notación. Para $t_0 = 0$ escribiremos la solución de (P) como $x = x(t, x_0)$. Es decir, y por definición,

$$x(t, x_0) = x(t, 0, x_0).$$

De acuerdo con esto, si usamos la unicidad de soluciones se podremos expresar,

$$x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, x_0)$$

(¿Por qué?).

Definición. Una órbita γ de la ecuación (1) es el conjunto $\gamma = \{x(t) : t \in (\alpha, \omega)\}$. El conjunto de las órbitas de (1) se denomina el espacio de fases de dicha ecuación. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces una semiórbita a la derecha (a la izquierda) de x_0 es un conjunto de la forma,

$$\gamma^+(\gamma^-) = \{x(t, t_0, x_0) : t \geq t_0(t \leq t_0)\}.$$

Nota. El objetivo de la teoría cualitativa es el estudio y descripción del espacio de fases de (1), con especial énfasis en el comportamiento asintótico de sus soluciones (cuando $t \rightarrow \pm\infty$).

Teorema 1. $x = x(t)$ es una solución maximal de (1) en (α, ω) si y sólo si, cualquiera que sea $\tau \in \mathbb{R}$, $y(t) = x(t + \tau)$ es una solución maximal de (1) definida en $(\alpha - \tau, \omega - \tau)$.

Teorema 2. *Por cada punto $x_0 \in \mathbb{R}$ sólo pasa una órbita (respectivamente, semiórbita $\gamma^\pm$) γ de (1). Se designarán por $\gamma(x_0)$ (r. $\gamma^\pm(x_0)$). Además, si dos soluciones $x(t)$ e $y(t)$ generan la misma órbita entonces existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $y(t) = x(t + \tau)$.*

Nota. El teorema 2 invita a pensar que el estudio (geométrico) de las órbitas de (1) puede resolver algunos problemas de tratamiento analítico muy complicado. Por ejemplo el estudio de la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de (1).

Ejemplos. Hállense todas las órbitas de las ecuaciones,

- (1) $x' = x$
- (2) $x' = x(1 - x)$
- (3) $x' = x(1 - x)(2 - x)$
- (4) $x' = y, y' = -x$.

Definición. Se llama flujo asociado a (1) a la función (v. más arriba) $\varphi(t, x_0) = x(t, x_0)$.

Teorema 3. *Supongamos que todas las soluciones de (1) están definidas en $\mathbb{R}$ (esta es una hipótesis estética). Entonces la aplicación flujo*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) &\rightarrow \varphi(t, x_0) = x(t, x_0) \end{aligned}$$

satisface las siguientes propiedades,

- a) $\varphi(t, x_0) = x(t, x_0)$ es C^1 y verifica $\varphi(0, z) = z$, para $z \in \mathbb{R}^n$.
- b) $\varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1 + t_2, x_0)$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Nota. En las condiciones del teorema 4 la aplicación $T_t(z) = x(t, z)$ define, para cada $t \in \mathbb{R}$, un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que la familia $\{T_t\}$ define un grupo de operadores lineales para la composición “ $\circ$ ” donde (v. Teorema 4 -b))

$$T_{t_1} \circ T_{t_2} = T_{t_1+t_2},$$

y donde, $T_0 = I$ (la aplicación identidad), $T_t^{-1} = T_{-t}$. En el caso de la ecuación lineal

$$x' = Ax$$

es consecuencia inmediata de la representación explícita: $T_t = e^{tA}$.

V.2. Clasificación de órbitas. Órbitas de una ecuación en el plano

Teorema 4. *Sea $x = x(t)$ una solución de (1). Entonces se da una y sólo una de las siguientes opciones,*

- a) O bien, $x(t_1) \neq x(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$ (en este caso la órbita generada γ por $x(t)$ se dice abierta),
- b) O bien existe $T > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y además $x(t_1) \neq x(t_2)$ para $0 \leq t_1 < t_2 < T$ (en este caso se dice que $x(t)$ genera una solución periódica de período minimal T , llamándose “órbita cerrada” a la correspondiente órbita γ),
- c) O bien $x(t) = x_0$ para todo t (en este caso se dice que x_0 –la órbita– es un punto crítico).

Observaciones.

- a) x_0 es un punto crítico de (1) si y sólo si $f(x_0) = 0$.
- b) Si $x(t)$ es solución de (1), entonces $x(t + T) = x(t)$ para todo t , si y sólo si $x(0) = x(T)$ (compruébese).

Consideraremos la ecuación lineal

$$x' = Ax \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

en donde supondremos que $\det(A) \neq 0$. Se dice entonces que la ecuación lineal es “no degenerada”. Designaremos por λ_1 y λ_2 los autovalores de A , por V_1 y V_2 los correspondientes autoespacios. Recuérdese que dichos autovalores son las raíces de:

$$\lambda^2 - \text{traza } A\lambda - \det A = 0,$$

con $\text{traza } A = a_{11} + a_{22}$.

Damos a continuación una descripción detallada de las órbitas de la ecuación. Por ejemplo, en el teorema que sigue, las órbitas cerradas son elipses. Sin embargo damos la información en terminología del caso no lineal.

Teorema 5. *Supongamos que λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, es decir $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$. Si $\alpha > 0$ (< 0) entonces todas las órbitas de (5) tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ ($+\infty$) y a $+\infty$ en módulo cuando $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), rotando infinitas veces alrededor del origen $(0, 0)$. Si $\alpha > 0$ se dice que $(0, 0)$ es un foco inestable, estable si $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$, todas las órbitas son cerradas y rotan infinitas veces alrededor de $(0, 0)$ con período $2\pi/\beta$ (en este caso se dice que $(0, 0)$ es un centro lineal).*

Teorema 6. *Supongamos que λ_1 y λ_2 son reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Se tienen los siguientes casos:*

- a) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$). *Entonces las únicas órbitas acotadas cuando $t \rightarrow +\infty$, que además tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ son $(0, 0)$ y las dos semirectas de V_1 . Análogamente las únicas órbitas acotadas cuando $t \rightarrow -\infty$, que tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ son $(0, 0)$ y las dos semirectas de V_2 (se dice que $(0, 0)$ es un punto de silla).*
- b) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. *Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ todas las orbitas convergen a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Exceptuando las órbitas en V_2 todas las restantes órbitas se acercan a $(0, 0)$ de forma tangente a V_1 . En este caso se dice que $(0, 0)$ es un nodo estable. Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ la situación es análoga cambiando t por $-t$ ($(0, 0)$ se llamaría entonces nodo inestable).*

Teorema 7. *Supongamos que λ_1 es un autovalor doble y negativo.*

- a) *Si $\dim V_1 = 2$ entonces todas las órbitas son semirectas que convergen a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*
- b) *Si $\dim V_1 = 1$ entonces todas las órbitas de (1) convergen a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ acercándose a dicho punto de manera tangente a V_1 .*

En ambos casos se dice que $(0, 0)$ es un nodo estable impropio. Si λ_1 es positivo, la situación es la misma una vez se ha cambiado t por $-t$.

V.3. El comportamiento de una ecuación plana en el entorno de puntos críticos regulares.

Consideraremos una vez más la ecuación C^1 en el plano,

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (S)$$

la cual estudiaremos en las proximidades de un punto crítico (x_0, y_0) . Recuérdese a tales efectos el comportamiento de los sistemas lineales planos con respecto al punto crítico (aislado) $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Nuestra primera definición es,

Definición. Un punto crítico de la ecuación precedente $p_0 = (x_0, y_0)$ se dice no degenerado si $f'((x_0, y_0))$, la matriz jacobiana de $f = (f_1, f_2)$, es invertible (es decir tiene determinante no nulo).

Propiedad. Un punto crítico $p_0 = (x_0, y_0)$ no degenerado para la ecuación (S) es aislado para dicha ecuación. Es decir, existe un entorno U de p_0 donde no hay otros puntos críticos para dicha ecuación.

Nota. Para evitar confusiones señalamos que x representará en algunos casos el vector (x_1, x_2) (lo mismo con y, z respecto de (y_1, y_2) ó (z_1, z_2)), en otros la primera componente del vector (x, y) .

Observaciones. Cuando se estudia la ecuación C^1

$$x' = f(x) \quad (1)$$

cerca de un punto crítico $p_0 \in \mathbb{R}^n$, resulta conveniente hacer el cambio $y = x - p_0$, tras el que la ecuación se transforma en (teorema de Taylor)

$$y' = Ay + o(|y|), \quad (2)$$

donde $A = f'(x)$ y donde $o(|y|)$ es una función C^1 que tiene la propiedad:

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{o(|y|)}{|y|} = 0.$$

Estudiar las órbitas de (1) cerca de p_0 equivale a estudiar las órbitas de (2) cerca de $y = 0$ (¡ que es un punto crítico de la ecuación (2)!). Por otra parte, el estudio de (2) cerca de $y = 0$ se corresponde con de

$$z' = Jz + o(|z|), \quad (3)$$

obtenida de (2) tras el cambio lineal $y = P^{-1}z$, P una matriz $n \times n$ invertible; en la que $J = PAP^{-1}$. Esto permite simplificar la matriz A original con el objeto de tener el mayor número de ceros posible (por ejemplo si J es la forma canónica de Jordan de A).

Las siguientes definiciones fueron introducidas por M. Lyapunov a principios de siglo.

Definición. Un punto crítico de (1), p_0 se dice estable si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ (que depende de ε y en principio de t_0) tal que si $\bar{x}_0$ cumple $|\bar{x}_0 - p_0| < \delta$ entonces $|x(t, t_0, \bar{x}_0) - p_0| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$.

Un punto crítico p_0 de (1) se dice asintóticamente estable si a) es estable, b) existe $r > 0$ (que en principio depende de t_0) tal si $|\bar{x}_0 - p_0| < r$ entonces:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, \bar{x}_0) = p_0.$$

Ejemplos.

a) El punto crítico $(0, 0)$ es estable para la ecuación:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

pero no es asintóticamente estable.

b) $(x, y) = (0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable para la ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - cy, \end{cases}$$

donde $c > 0$.

En algunos casos es conviene estudiar las ecuaciones planas en otros sistemas de coordenadas. Por ejemplo en coordenadas polares.

Coordenadas polares. La ecuación:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (C)$$

se puede expresar (haciendo $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \text{tag}^{-1}(y/x)$) en la forma:

$$\begin{cases} \rho' = R(\rho, \theta) \\ \theta' = \Theta(\rho, \theta). \end{cases} \quad (P)$$

Para construcción de ejemplos y uso general conviene establecer claramente la relación entre ambas ecuaciones. En efecto, dada (C) se tiene (P) en la forma:

$$\begin{cases} \rho' = \cos \theta f + \text{sen } \theta g \\ \theta' = \rho^{-1}(-\text{sen } \theta f + \cos \theta g), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \rho' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta / \rho & \cos \theta / \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, dada (P) las ecuaciones cartesianas se recuperan en la forma:

$$\begin{cases} x' = \rho^{-1}Rx - \Theta y \\ \theta' = \rho^{-1}Ry + \Theta x, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\rho & -y \\ y/\rho & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

Como veremos el lenguaje de las coordenadas polares es muy conveniente cuando se trata con órbitas cerradas o fenómenos de vorticidad en ecuaciones diferenciales ordinarias.

El siguiente resultado es un caso particular de uno de los teoremas más célebres de Lyapunov.

Teorema (Lyapunov). Sea p_0 un punto crítico de la ecuación (1) tal que $f'(x_0)$ tiene sus autovalores con la parte real negativa. Entonces p_0 es asintóticamente estable.

Teorema 8. Sea p_0 un punto crítico no degenerado de la ecuación $x' = f(x)$ tal que la matriz $f'(p_0)$ admite dos autovalores λ_1 y λ_2 complejos conjugados, es decir $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ($\beta > 0$). Si $\alpha < 0$ (> 0) entonces existe un entorno U de p_0 donde todas las semiórbitas positivas (negativas) de (1) tienden a p_0 cuando $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) rotando infinitas veces alrededor del punto p_0 . Si $\alpha > 0$ se dice que x es un foco (no lineal) inestable, o (no lineal) estable si $\alpha < 0$.

Advertencia. Si $\alpha = 0$ en el teorema, no se puede predecir en principio el comportamiento de las órbitas cerca de x_0 . La situación genérica es que, salvo por un número finito, se pierden la totalidad de las órbitas periódicas de período $2\pi/b$ del caso lineal. En el ejemplo,

$$\begin{cases} \rho' = -\rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

se pierden todas las soluciones periódicas del problema lineal asociado

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

En los siguientes teoremas es necesario suponer que $f = f(x)$ es de clase C^2 .

Teorema 9. Supongamos que los autovalores de $f'(p_0)$, λ_1 y λ_2 son reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces,

- a) (*Propiedad del punto de silla*) Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) existe un entorno U de p_0 , dos semiórbitas positivas γ_1, γ_2 , y dos semiórbitas negativas Γ_1, Γ_2 contenidas todas ellas en U con las propiedades siguientes. Todas las semiórbitas positivas γ^+ que estén contenidas en U satisfacen $\gamma^+ \subset \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{p_0\}$ y convergen además a p_0 cuando $t \rightarrow +\infty$, aproximándose a p_0 de forma tangente a la recta $p_0 + V_1$ (V_1 el autoespacio asociado al autovalor λ_1). Análogamente, toda semiórbita negativa γ^- en U debe estar contenida en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{p_0\}$ y deberá aproximarse a p_0 cuando $t \rightarrow -\infty$ de forma tangente a la recta $p_0 + V_2$ (V_2 el autoespacio asociado a λ_2). Además, γ_1 y γ_2 , así como Γ_1 y Γ_2 se aproximan a p_0 siguiendo sentidos opuestos.
- b) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ existe un entorno U de p_0 en el que todas las semiórbitas positivas (omitimos a continuación la palabra positiva) convergen a p_0 cuando $t \rightarrow +\infty$. Exceptuando dos semiórbitas en U , Γ_1, Γ_2 , llamadas separatrices, que convergen a p_0 de forma tangente a $p_0 + V_2$ (en sentidos opuestos) cuando $t \rightarrow +\infty$, todas las restantes semiórbitas en U se acercan a p_0 de forma tangente a $p_0 + V_1$. Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ la situación es análoga cambiando t por $-t$.

El siguiente resultado que generaliza el correspondiente resultado del caso lineal.

Teorema 10. Supongamos que λ_1 es un autovalor doble y negativo de $f'(p_0)$ representando por V_1 el correspondiente autoespacio.

- a) Si $\dim V_1 = 2$ entonces existe un entorno U de p_0 donde todas las semiórbitas convergen a p_0 cuando $t \rightarrow +\infty$. Además, por cada semirecta que empieza en p_0

se aproxima una única semiórbita γ^+ a p_0 , de forma tangente a dicha semirecta, cuando $t \rightarrow +\infty$.

- b) Si $\dim V_1 = 1$ entonces existe un entorno U de p_0 donde todas las semiórbitas convergen a p_0 cuando $t \rightarrow +\infty$ acercándose a dicho punto de manera tangente a la recta $p_0 + V_1$.

En los resultados precedentes está implícito el siguiente teorema también debido a Lyapunov.

Corolario. Sea p_0 un punto crítico no degenerado de la ecuación (1) tal que alguno de los autovalores de $f'(p_0)$ tiene la parte real positiva. Entonces p_0 es inestable.

Nota. Se demuestra en un curso de teoría de estabilidad (por ejemplo, en la optativa “Ecuaciones Diferenciales”) que el resultado es cierto en el caso n -dimensional y que la condición de no degeneración de p_0 es, a estos efectos, superflua.

V.4. La ecuación orbital.

Consideremos la ecuación C^1 en el plano,

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}.$$

Vamos a estudiar geoméricamente la órbita γ que pasa por $P_0 = (x_0, y_0)$. Supongamos que P_0 no es punto crítico (caso contrario todo está dicho). Entonces $f(P_0)$ ó $g(P_0)$ son no nulos. Supongamos que, por ejemplo, $f(P_0) \neq 0$ y sea $\mathcal{C}_0$ la componente conexa del conjunto

$$\{(x, y) : f(x, y) \neq 0\} \quad (3)$$

a la que pertenece P_0 . Entonces se tiene que aquella parte de γ que se encuentra en $\mathcal{C}_0$, es decir $\gamma \cap \mathcal{C}_0$, viene descrita por la gráfica de la única solución $y = Y(x)$ del problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Normalmente, γ cruzará varias de las componentes conexas de (3) a través de la “curva” $f(x, y) = 0$. En un punto de la curva $f(x, y) = 0$ la órbita γ se debe expresar, de manera alternativa, como la gráfica de la función de y que satisface la ecuación,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}.$$

Ejemplo: Ecuaciones de Lotka-Volterra. Las órbitas de la ecuación

$$\begin{cases} x' = Ax - Bxy \\ y' = -Cy + Dxy, \end{cases}$$

donde A, B, C, D son coeficientes positivos, se pueden describir en la forma

$$V(x, y) = c \quad (\text{constante}) \quad (4)$$

donde

$$V(x, y) = A \log y - By + C \log x - Dx.$$

Es más, la función $V(x, y)$ se conserva sobre las soluciones de las ecuaciones de Lotka-Volterra, es decir, $V(x(t), y(t))$ es constante sobre cada solución $(x(t), y(t))$ de dichas ecuaciones. Más en general se tiene la siguiente definición.

Definición. Una función C^1 , $V = V(x)$, se dice una integral primera para la ecuación (1) si $V(x(t)) = c$ (constante) para cada solución $x(t)$ de (1).

Propiedad. Una función $V = V(x)$ de clase C^1 es una integral primera para (1) si y sólo si

$$\nabla V(x) \cdot f(x) = 0 \quad (\text{producto escalar})$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Nota. La función $V(x, y)$ en (4) es una integral primera de las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Propiedad. Consideremos la ecuación C^1

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

y supongamos que

$$\text{div}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2.$$

Entonces, en un entorno de cada punto de $\mathbb{R}^2$ se puede definir una función C^1 , $V = V(x, y)$ (única salvo constantes aditivas), tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = f \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -g,$$

en dicho entorno. En particular, $V(x, y)$ es una integral primera en dicho entorno.

Nota. La existencia de integrales primeras en el plano, en el entorno de puntos singulares es normalmente evidencia de la existencia de órbitas cerradas (infinitas) rodeando al punto singular.

Ejemplo. La ecuación:

$$x'' + f(x) = 0$$

se puede escribir,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x). \end{cases}$$

Está en las condiciones de la última propiedad y

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(s) ds.$$

Observaciones. La propiedad afirma que si V es una integral primera de la ecuación (1) en el plano, entonces, sus órbitas están contenidas en los conjuntos de nivel

$$\{(x, y)/V(x, y) = c\}$$

($c = \text{constante}$). Sin embargo, en general $V = c$ podría contener varias órbitas, al admitir dicho conjunto más de una componente conexa.

Para averiguar el número de órbitas (que en algunos casos patológicos pudiera ser infinito) dentro de un conjunto de nivel $V = c$ tenemos la siguiente

Propiedad. Sea $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 y consideremos el sistema,

$$\begin{cases} x' = V_y \\ y' = -V_x. \end{cases}$$

Sea C el conjunto de puntos críticos de dicha ecuación. Supóngase que el conjunto de nivel $\{V = c\}$ es no vacío. Entonces en $\{V = c\} \setminus C$ hay tantas órbitas como componentes conexas tenga dicho conjunto.

Ejemplo. La ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - x, \end{cases}$$

está en las condiciones de la propiedad para la función:

$$V = -\frac{y^2}{2} + -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

El conjunto,

$$V(x, y) = \frac{1}{6},$$

consta de cuatro órbitas. Una de ellas el punto crítico $(1, 0)$. Si de $V = 1/6$ quitamos $(1, 0)$ obtenemos tres componentes conexas que son las órbitas no triviales que hay en $V = 1/6$. La componente conexa acotada es una órbita que conecta el punto $(1, 0)$ consigo mismo empleando infinito tiempo en el trayecto. Tal órbita se llama homoclínica.

V.5. Soluciones periódicas y el problema de los dos cuerpos

Una cuestión de capital importancia de la que no trataremos es el de la existencia de órbitas cerradas de ecuaciones autónomas, que se conocen como oscilaciones libres, ciclos entre otros nombres.

El ejemplo fundamental de órbitas cerradas lo constituyen las órbitas de objetos celestes (estrellas, planetas, satélites, etc).

El problema de los dos cuerpos, que ahora describimos, se sitúa en los propios orígenes del cálculo infinitesimal.

El Problema de los dos cuerpos.

En el problema de los dos cuerpos dos masas m_1 y m_2 (dos objetos celestes) interactúan entre sí por efecto de la atracción gravitatoria mutua. Una prueba rigurosa de que el movimiento relativo de los mismos siempre es una cónica la dio Newton por vez primera al integrar de forma geométrica las ecuaciones del problema. Como sabemos, tales ecuaciones son:

$$m_1 \ddot{x}_1 = Gm_1 m_2 \frac{1}{|x_1 - x_2|^3} (x_2 - x_1),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = Gm_1 m_2 \frac{1}{|x_1 - x_2|^3} (x_1 - x_2).$$

En este caso se dispone de diversas estrategias para integrar el sistema. Una de ellas consiste en analizar el movimiento relativo $r = x_1 - x_2$, poner $\mu = G(M_1 + M_2)$ y escribir:

$$\ddot{r} = -\mu \frac{r}{|r|^3}.$$

Es bien conocido que el movimiento es plano. En efecto, basta con derivar el producto vectorial:

$$(r \times \dot{r})' = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} = 0,$$

luego $r \times \dot{r} = e$ (e constante) y $r \cdot e = 0$. El movimiento es pues plano.

Usando entonces coordenadas polares (ρ, θ) se llega a las ecuaciones:

$$\ddot{\rho} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{\rho^2},$$

$$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0.$$

De la segunda relación se deduce que $\mathcal{J} = \rho^2 \dot{\theta}$ es una constante del movimiento de especial relevancia. En efecto, el área A barrida por la órbita entre los instantes t_0 y t (de ángulos correspondientes θ_0 y θ resulta ser:

$$A(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} \rho(\theta_1)^2 d\theta_1,$$

en donde $\rho = \rho(\theta)$ en la órbita. Como $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$, la velocidad areolar ($A(\theta(t))$) resulta ser:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \rho^2(t) \dot{\theta}(t).$$

La conservación de $\mathcal{J}$ es entonces una prueba de la segunda ley de Kepler.

Por otra parte:

$$dt = \frac{\rho^2}{\mathcal{J}} d\theta,$$

luego, si $h = h(t)$ es una función de t :

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{dh}{d\theta}, \\ \frac{d^2h}{dt^2} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{dh}{dt} \right).\end{aligned}$$

Para $\rho = \rho(\theta)$:

$$\frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = -\frac{\mu}{\rho^2} + \frac{\mathcal{J}^2}{\rho^3}.$$

Poniendo $u = \frac{1}{\rho}$ llegamos por fin a:

$$u'' + u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2},$$

de donde:

$$u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} + B \cos(\theta - \omega), \quad B > 0,$$

o también:

$$\frac{p}{\rho} = 1 + e \cos \theta,$$

con $p^{-1} = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2}$, $e = Bp$, que es la ecuación de una cónica de excentricidad e . No es difícil comprobar que $e = 0$ corresponde a la circunferencia, $0 < e < 1$ a la elipse, $e = 1$ a la parábola y $e > 1$ al caso de la hipérbola. En consecuencia, las órbitas del movimiento relativo son cónicas. Obsérvese que en el caso de las elipses y circunferencias se obtienen órbitas cerradas. Se obtienen así movimientos periódicos del problema de forma directa.

Interacciones presa-depredador. Las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax - Bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -Cy + Dxy\end{aligned}$$

constituyen un modelo sencillo para “imitar” la relación trófica entre una presa (x el número de efectivos) y su depredador y en un medio.

Las ecuaciones ganan mucho si refieren a la población de equilibrio:

$$x_0 = \frac{C}{D}, \quad y_0 = \frac{A}{B}.$$

En efecto, llamando:

$$u = \frac{x}{x_0}, \quad v = \frac{y}{y_0},$$

e introduciendo la escala de tiempos:

$$\tau = At$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1-v) \\ \frac{dv}{dt} &= \alpha v(u-1)\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{C}{A}$. Resulta que:

$$V(u, v) = \alpha(u - \log u) + v - \log v,$$

es una integral primera. La función V es convexa estrictamente, tiende a infinito cuando (u, v) tiende a alguno de los semiejes y tiene un mínimo absoluto estricto en el punto singular $(1, 1)$. Éstos son órbitas y el primer cuadrante resulta ser invariante. Por tanto, el primer cuadrante está lleno de órbitas cerradas que rodean al equilibrio $(1, 1)$. Éstas representan las fluctuaciones periódicas del sistema presa depredador en torno a sus valores de equilibrio.

Se comprueba fácilmente que $(1, 1)$ es un centro lineal. Se tiene por tanto un ejemplo donde la estructura lineal se reproduce en el caso no lineal. El origen $(0, 0)$, el estado de extinción del sistema, es un punto de silla. Los ejes constituyen sus variedades estable e inestable.

V.6. Ejercicios

1. Hállense todas las órbitas –junto con la orientación respectiva de las mismas– de las siguientes ecuaciones:

$$a) x' = x, \quad b) x' = x - x^2, \quad c) x' = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

¿Cómo es la forma general de las órbitas $\gamma \subset \mathbb{R}$ de una ecuación escalar $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$? Si γ es una de tales órbitas, trácese la gráfica de todas las soluciones de la ecuación que la tienen por órbita.

2. Estudiar las órbitas de las siguientes ecuaciones lineales dando una descripción de su comportamiento con especial énfasis en las proximidades del punto singular $(x, y) = (0, 0)$:

(1)

$$\begin{aligned}x' &= -2x + 6y \\ y' &= -2x + 5y.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x' &= -9x + 13y \\ y' &= -5x + 7y.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}x' &= -18x + 30y \\y' &= -10x + 17y.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}x' &= -8x + 13y \\y' &= -5x + 8y.\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}x' &= -6y \\y' &= 2x - 7y.\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}x' &= -5x - 4y \\y' &= -x - y.\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}x' &= 4y \\y' &= -x + 4y.\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}x' &= -7x + 13y \\y' &= -5x + 9y.\end{aligned}$$

3. Hállense los puntos singulares y decídase –siempre que sea posible– el comportamiento de las órbitas en las proximidades de dichos puntos:

(1)

$$\begin{aligned}x' &= y - 1 \\y' &= x + y + 5.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x' &= 3x^2 - xy \\y' &= 4xy - 3y^2.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}x' &= (x + 1)(y - 2) \\y' &= x^2 - x - 2.\end{aligned}$$

4. Las mismas cuestiones que en el problema anterior para los sistemas planos:

$$a) \begin{cases} x'_1 = 1 - x_2 \\ x'_2 = x_1^3 + x_2, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x'_1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \\ x'_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1), \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - x - \delta y, \end{cases} \quad d) \begin{cases} u' = v + u - \frac{1}{3}u^3 \\ v' = -\varepsilon u \end{cases} \quad (\varepsilon > 0),$$

$$e) u'' + cu' + u(1 - u) = 0 \quad c \in \mathbb{R}.$$

En el caso c) demuéstrese que las soluciones $(x(t), y(t))$ de la ecuación hacen constante la función:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$

5. Estúdiense las órbitas de los siguientes sistemas autónomos no lineales:

(1)

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ y' &= x^2 + y^2 + xy. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 6 \\ y' &= 3x - y - 6. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - 2y^{-3} \\ y' &= 3x^2 - 2xy. \end{aligned}$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 y $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva en $\mathbb{R}^2$: $\varphi(x) > 0$. Demuéstrese que las ecuaciones:

$$x' = f(x),$$

y

$$x' = \varphi(x)f(x),$$

comparten las mismas órbitas.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ una aplicación C^1 tal que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se recuerda entonces que existe una función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , tal que:

$$f_1 = V_{x_1} \quad f_2 = V_{x_2}.$$

a) Demuéstrese que todas las soluciones de la ecuación:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

hacen constante $V(x_1, x_2)$.

b) Demuéstrese que todas las soluciones de la ecuación:

$$x'' + f(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R},$$

hacen constante la función (energía):

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s) ds,$$

donde $y = x'$.

c) Aprovechese la información precedente para trazar el espacio de fases de las ecuaciones siguientes:

$$x'' + \operatorname{sen} x = 0$$

$$x'' + x - x^2 = 0$$

$$x'' + x - x^3 = 0.$$

Estúdiense con detalle las diversas órbitas observadas.

8. (Ecuación Orbital). Sea $f = (f_1, f_2)$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 y sea γ la órbita de la ecuación:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

que pasa por el punto (x_0, y_0) donde $f_1(x_0, y_0) \neq 0$. Demuéstrese que γ puede describirse en las proximidades de (x_0, y_0) en la forma:

$$\gamma = \{(x, y) : y = y(x), x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

donde $y = y(x)$ satisface el problema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Desarróllense conclusiones análogas si alternativamente $f_2(x_0, y_0) \neq 0$.

9. Sea $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que define la ecuación:

$$\begin{cases} x' = V_y(x, y) \\ y' = -V_x(x, y). \end{cases}$$

Si C es una constante, demuéstrese que el conjunto de órbitas contenidas en la curva de nivel:

$$V(x, y) = C$$

coincide con el de puntos singulares de dicho conjunto junto con el de componentes conexas que resulten del mismo al retirar dichos puntos singulares.

Utilícese este resultado para volver a estudiar las ecuaciones de ejercicios anteriores que correspondan a este formato.

10. Analícense con detalle las siguientes ecuaciones:

(1) Ecuación de Lotka-Volterra, sistemas presa depredador:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy, \end{cases}$$

$$a, b, c, d > 0.$$

(2) Sistemas competitivos:

$$\begin{cases} x' = a_1 x \frac{k_1 - x - y}{k_1} \\ y' = a_2 y \frac{k_2 - x - y}{k_2}, \end{cases}$$

$$a_1, a_2, k_1, k_2 > 0. \text{ Se supondrá } k_1 \neq k_2, a_1 \neq a_2.$$