CAPÍTULO I

ANÁLISIS MATEMÁTICO V

INTRODUCCIÓN Y MÉTODOS ELEMENTALES

1. Ejemplos

Ejemplo 1.
Se puede afirmar que la teoría de ecuaciones diferenciales nació en torno al siguiente problema: "determinar la evolución $x(t)$ de una partícula de masa m sometida a un campo de fuerzas $F = F(x)$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuando se conocen su posición y velocidad inicial: $x(t_0), x'(t_0) \in \mathbb{R}^3$". En otras palabras, hallar la solución del problema,

$$\begin{cases} mx" = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1, \end{cases} \tag{1}$$

donde los datos del problema son $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^3$ y el campo de fuerzas $F(x)$. En el caso de la fuerza gravitatoria creada por un cuerpo de masa M en el origen $x = 0$, $F(x) = -G\frac{mM}{|x|^3}x$ (G es la constante de gravitación).
Ejemplo 2. El oscilador armónico con un grado de libertad
Es un caso particular del anterior con $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -x$ (Ley de Hooke). La conclusión más importante es que genéricamente, las ecuaciones diferenciales admiten infinitas soluciones.

Propiedad 1. *Para $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ dados, el problema*

$$\begin{cases} mx" = -x \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1, \end{cases} \tag{2}$$

admite una única solución.

Ejemplo 3. Teorema fundamental del cálculo
Recuérdese el siguiente resultado (cf. por ejemplo Spivak, Calculus) "Si $f = f(t), f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es continua entonces la función $F(t) = \int_\alpha^t f(s)\, ds$ es derivable en $[\alpha, \beta]$ (en α por la derecha y en β por la izquierda) y además $F'(t) = f(t), \forall t \in [\alpha, \beta]$". Se deduce de aquí el siguiente resultado.

Propiedad 2. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua. Entonces el problema,*

$$\begin{cases} x' = f(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

admite, cualesquiera que sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, una única solución definida en (a, b).

Ejemplo 4. Ley de crecimiento de Malthus
Si $x(t)$ representa el número de individuos de una población biológica, entonces el cociente $\frac{x'(t)}{x(t)}$ se llama tasa de crecimiento de la población. La población sigue la ley de Malthus si dicha tasa es constantemente k, $k > 0$.

Propiedad 3. *El problema*

$$\begin{cases} x' = kx(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

admite una única solución.

También es razonable suponer que la tasa de crecimiento de la población es sensible a cambios estacionales. Por ejemplo $k = k(t)$ una función T-periódica. Otra de las maneras en que pueden aumentar o disminuir los efectivos de una población es en virtud a procesos migratorios o mediante capturas (pesca, caza, cosecha) realizadas sobre aquella. La ecuación

$$x' = kx + g(t),$$

representa esta situación. El término g tiene dimensiones de número de indviduos por unidad de tiempo.

Para su uso posterior incluimos la siguiente propiedad:

Propiedad 4. *La ecuación diferencial,*

$$x'(t) = kx(t) + g(t)$$

admite, para cada función continua $g \in C(\mathbb{R})$ una única solución $x(t)$ que satisface $x(0) = 0$. A saber:

$$x(t) = \int_0^t e^{k(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau.$$

Es natural en muchos casos que además $g(t)$ sea periódica. Un buen ejercicio es el siguiente.
Ejercicio Demuéstrese que para cada $g \in C(\mathbb{R})$ periódica, i. e. $\forall t \in \mathbb{R} : g(t + T) = g(t)$, donde $T > 0$, la ecuación diferencial precedente admite una única solución periódica $x(t)$.
Ejemplo 5. Crecimiento logístico

Si la tasa de la población es $\frac{x'(t)}{x(t)} = k - \alpha x(t)$ se dice que la pobación sigue la ley de crecimiento logístico o de Verhulst.

Propiedad 5. *Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema,*

$$\begin{cases} x' = x(k - \alpha x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

admite una única solución. Además, dos de las soluciones de la ecuación (las que corresponden, respectivamente, a los datos iniciales $x_0 = 0$ y $x_0 = k/\alpha$) son constantes.

Ejemplo 6. Datación por C_{14}. Véase documento anexo.

2. El problema de Cauchy

Sea $f: \begin{array}{ccc} \Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t,x) & \to & f(t,x) \end{array}$ *continua*, $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un abierto, diremos que el par

(x,I), donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $x=x(t)$, $x: \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & x(t) \end{array}$ una función diferenciable, es una solución de la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x), \tag{1}$$

si
(a) $\forall t\in I : (t,x(t))\in\Omega$,
(b) $\forall t\in I : x'(t) = f(t,x(t))$.
En el contexto de las ecuaciones y sus aplicaciones se conoce a $f(t,x)$ como el "campo" asociado a (1).
Observaciones. La definición resalta que debe tenerse en cuenta el dominio de definición I de los candidatos a solución. Cuando la solución se construye de manera teórica, ésta sólo está definida en un pequeño intervalo que va prolongándose paulatinamente. I puede ser cualquier tipo de intervalo a condición de que tenga interior no vacío. Las derivadas en los extremos se considerarán laterales. El concepto de solución introducido, amén de aparatoso, lleva a especulaciones triviales del tipo siguiente. Si (x,I) es una solución de (1), entonces dicha solución genera infinitas más. En efecto, para cualquier subintervalo $J\subset I$, si defino $y = x_{|_I}$ (es decir, la restricción de x a I), entonces (y,J) también será otra solución de (1).

Definición. *Para $f(t,x)$ como antes el problema de Cauchy con datos iniciales $(t_0,x_0)\in\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$:*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

consiste en hallar una solución (x,I) de $x'=f(t,x)$ tal que $t_0\in I$ y $x(t_0)=x_0$.

Observaciones. Volviendo a la observación anterior, nótese que entonces el problema interesante consiste en hallar aquellas soluciones (x^*,I^*) de (2) que extiendan a todas las otras posibles solcuiones (x,I) de dicho problema. En el capítulo 3 se analizará esta cuestión en profundidadad. Conviene también clarificar qué se entiende por el hecho (casi obvio) de que (2) admita una única solución.

Definición. *Se dice que el problema de Cauchy (2) tiene la propiedad de unicidad de soluciones si, cualesquiera que sean las soluciones (x_1,I_1), (x_2,I_2) de (2) entonces $x_1(t)=x_2(t)$, $\forall t\in I_1\cap I_2$.*

Ejemplo. El problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admite al menos dos soluciones. Una de ellas es (x_1, I_1), con $x_1(t) \equiv 0, I_1 = \mathbb{R}$, otra es (x_2, I_2) donde $x_2(t) = \text{signo}(t)\frac{t^2}{4}$, siendo $\text{signo}(t) = -1$ (respectivamente $0, 1$) si $t < 0$ (resp. $= 0,\ > 0$). Recalquemos que lo notable es que el problema de Cauchy tenga más de una solución; por la breve experiencia que se tiene, las ecuaciones diferenciales admiten siempre infinitas soluciones.

Observaciones. Más adelane se demostrará que si el problema de Cauchy (2) tiene la propiedad de unicidad de soluciones entonces (2) admite una única solución maximal (x^*, I^*) en el sentido de que si (x, I) es otra solución entonces $I \subset I^*$ & $x = x^*_{|_I}$.

En las aplicaciones es muy frecuente el siguiente tipo de ecuación diferencial,

$$x^{(k)} = G(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)}) \tag{1$'$}$$

donde,

$$\begin{array}{rcl} G: & \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (t, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}) & \rightarrow G(t, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}), \end{array}$$

Ω es un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ y G es continua. Una solución de $(1)'$ es asimismo un par (x, I), I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $x = x(t)$ una función que admite derivadas hasta el orden k en I, tal que,

a) $(t, x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)) \in \Omega,\ \forall\ t \in I,$

b) $x^{(k)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)),\ \forall\ t \in I.$

Se dice que $(1)'$ es una ecuación diferencial de orden k. En realidad, dicho tipo de ecuaciones se puede expresar en la forma (1).

Propiedad 2.1. *Toda ecuación de la forma* $(1)'$ *es equivalente a una cierta ecuación de la forma* (1)

Demostración. Supongamos que $x(t)$ es una solución de $(1)'$ definida en el intervalo I. Entonces la función $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t))$ es solución de:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \ldots \\ x_k' = G(t, x_1(t), \ldots, x_k(t)). \end{cases} \tag{3}$$

ecuación de la forma (1), concretamente $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$ donde $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ es $f_1 = x_2, \ldots, f_k = G(t, x_1, \ldots, x_k)$. Por otra parte, si $(\bar{x}, I)$ es una solución de ésta última, $\bar{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$, entonces $x_1(t)$ (ó (x_1, I)) es solución de $(1)'$. $\square$

Curvas isoclinas. Cuando la ecuación (1) es escalar, i. e. $x(t) \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces las soluciones $x(t)$ de la ecuación

$$x' = f(t, x),$$

definen curvas en el plano. La pendiente de una solución $x(t)$ que en el punto $t = t_0$ vale $x(t_0) = x_0$ vendrá entonces dada por $m = f(t_0, x_0)$. Por eso, para m fijado, el conjunto

$$\mathcal{I}_m = \{(t, x) \in \Omega / f(t, x) = m\}$$

se denominará curva isoclina, siempre que $\mathcal{I}_m$ sea una curva (ver el Teorema de la Función Implícita). En efecto, todas las soluciones que cortan a $\mathcal{I}_m$ lo hacen con pendiente m.

Ejemplos. Estúdiense las curvas isoclinas de las siguientes ecuaciones: a) $x' = x$, b) $x' = t^2 + x$, c) $x' = x - x^2$, d) $x' = t^2 + x^2$.

Poligonales de Euler. Las poligonales de Euler son las aproximaciones más inmediatas de las soluciones del problema de Cauchy (2) ($f(t,x)$ en las condiciones del comienzo del epígrafe). La idea consiste en aproximar la gráfica de una solución $(t, x(t))$ en un cierto intervalo $[a,b]$ (donde se supone definida) mediante una poligonal de vértices $P_0, P_1, \dots, P_N$.

Para ello se construye un algoritmo que permite calcular el punto P_i de la poligonal a partir del P_{i-1}. Así, conocida la regla de paso $P_{i-1} \to P_i$ sólo necesitamos conocer P_0 para obtener $P_1, \dots, P_N$ tras aplicación de la regla N veces.

Primeramente se divide $[a,b]$ en N partes $\{t_0 = a, t_1 = t_0 + h, \dots, t_N = t_0 + Nh = b\}$ donde $h = \frac{b-a}{N}$ se denomina el paso del algoritmo. Por otra parte se toma $P_0 = (t_0, x_0)$, es decir, los datos iniciales del problema de Cauchy cuya solución vamos a aproximar. Finalmente, conocido $P_{i-1} = (t_{i-1}, x_{i-1})$, el punto $P_i = (t_i, x_i)$ se deduce mediante las ecuaciones

$$t_i = t_{i-1} + h, \quad x_i = x_{i-1} + f(P_{i-1})h.$$

Nótese que los tramos que enlazan x_{i-1} con x_i en la poligonal, se recorren con velocidad $f(P_{i-1})$.

3. Métodos de integración elemental

El siguiente resultado se conoce de cursos anteriores aunque quizás bajo un aspecto diferente del que vamos a considerar. El problema principal consiste en probar la existencia de soluciones y de una ecuación $G(\alpha, y) = 0$ donde α es un parámetro. En algunos casos, para un valor particular α_0 es fácil resolver la ecuación, y en efecto podemos hallar una en particular y_0. Bajos ciertas condiciones –que se precisan a continuación– se puede probar la existencia de otras soluciones y próximas a y_0, para valores de α próximos a α_0. Se puede garantizar además que en esas condiciones de proximidad dichas soluciones son únicas. Por eso, el próximo resultado constituye el prototipo de teorema de existencia y unicidad.

Teorema de la Función Imlícita. *Sea* $F: \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^m \\ (x,y) & \to & F(x,y) \end{array}$, *$U$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, una función de clase C^1. Supongamos que existe $(x_0, y_0) \in U$ tal que*

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Supongamos además que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ es nosingular, o lo que es lo mismo, $\exists \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)^{-1}$.

Entonces, existen $\varepsilon, \delta > 0$ y una función C^1, $g: \begin{array}{ccc} B_\varepsilon(x_0) & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \to & g(x) \end{array}$ *tal que:*

a) (Existencia de soluciones) $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$ los pares $(x,y) = (x, g(x))$ son soluciones de la ecuación:

$$F(x,y) = 0. \tag{1}$$

b) (Unicidad de soluciones) Las únicas soluciones (x, y) *de (1) en el conjunto* $B_\varepsilon(x_0) \times B_\delta(y_0)$ *son las que se indican en a). Es decir, si* $(x, y) \in B_\varepsilon(x_0) \times B_\delta(y_0)$ *es solución de (1), entonces* $\exists x \in B_\varepsilon(x)$ *tal que* $y = g(x)$.

Teorema de existencia y unicidad, ecuaciones en variables separadas. *Sean* $p = p(t)$, $p : (a_1, a_2) \to \mathbb{R}$ *y* $q = q(x)$, $q : (b_1, b_2) \to \mathbb{R}$ *funciones continuas, de forma que* $q(x) \neq 0$, *para cada* $x \in (b_1, b_2)$. *Entonces,* $\forall t_0 \in (a_1, a_2), x_0 \in (b_1, b_2)$ *el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{p(t)}{q(x)} \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite una única solución definida en un cierto intervalo (α, ω).

Obsérvese que el teorema no da información sobre el dominio de existencia (α, ω) de las soluciones. El siguiente ejemplo muestra que en general no es cierto que $(\alpha, \omega) = (a_1, a_2)$.
Ejemplo 1. Hállese el dominio de existencia de las soluciones del problema,

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Ejemplo 2. Recapitúlese el dominio de existencia de las soluciones del problema (5). Obsérvese la influencia de la posición incial x_0 sobre dicho dominio. En particular, considérense los rangos *(a)* $x_0 < 0$, *(b)* $0 \leq x_0 \leq \frac{k}{\alpha}$ y *(c)* $x_0 < \frac{k}{\alpha}$.
Ecuaciones Homogéneas. Supongamos que $f : (a_1, a_2) \to \mathbb{R}$ es continua. Una ecuación diferencial homogénea es aquella cuyo "campo" o segundo miembro tiene la forma $f(t, x) = f(\dfrac{x}{t})$. Es decir,

$$x' = f(\frac{x}{t}).$$

Nótese que la ecuación está definida en los sectores (uno y su opuesto) $\Omega = \{(t, x)/a_1 < \dfrac{x}{t} < a_2\}$. Dichas ecuaciones se reducen a ecuaciones en variables separadas cuando se introduce el cambio de variable $u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$. En efecto, para $(t_0, x_0) \in \Omega$ el problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' = f(\dfrac{x}{t}) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

es equivalente a,

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{f(u) - u}{t} \\ u(t_0) = \dfrac{x_0}{t_0}. \end{cases}$$

Ejemplo. Hállese la solución del problema,

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Ecuaciones Lineales. Consideremos la función continua $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ más general, con la propiedad de ser lineal en x. Tal f será de la forma $f(t,x) = a(t)x$, con $\Omega = (a_1, a_2) \times \mathbb{R}$ y $a(t)$ continua en (a_1, a_2). Una pequeña variante de tal f es, a su vez, $f(t,x) = a(t)x + b(t)$, donde $b(t)$ también es continua en (a_1, a_2). La ecuación,

$$x' = a(t)x, \tag{H}$$

se dice lineal y homogénea, mientras que

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{NH}$$

se dice la no homogénea asociada a (H).

Propiedad 3.2. *Para cada $(t_0, x_0) \in (a_1, a_2) \times \mathbb{R}$ el problema*

$$\begin{cases} x' = a(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite por única solución a

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\ d\tau}.$$

Propiedad 3.3.
a) Si $y_1(t)$, $y_2(t)$ son soluciones de (NH), entonces la diferencia $x(t) = y_1(t) - y_2(t)$ es una solución de (H).
b) Si $x_p(t)$ es una solución fijada de (NH) entonces $\forall x(t)$ solución de (NH) $\exists\ y(t)$, una cierta solución de (H), tal que $x(t) = x_p(t) + y(t)$.
c) $\forall (t_0, x_0) \in (a_1, a_2) \times \mathbb{R}$ el problema,

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene por solución única a

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\tau)\ d\tau} b(s)\ ds.$$

Nota. Se conoce a esta expresión como la fórmula de variación de las constantes de Lagrange, de la que se dará la correspondiente versión para ecuaciones lineales de orden superior.
Ejemplos. Estúdiense las soluciones de las ecuaciones,
a) $x' + \cos tx = 0$
b) $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$
c) $(1+t^2)x' + tx = (1+t^2)^{\frac{5}{2}}$
Observaciones.

Las soluciones de las ecuaciones lineales (H) y (NH) existen donde estén definidos los coeficientes, es decir en (a_1, a_2). Si, por ejemplo, éstos pueden extenderse por continuidad a un intervalo mayor $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, $(a_1, a_2) \subset (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, entoces cada solución de (H) o (NH) en (a_1, a_2) puede extenderse con unicidad a dicho intervalo (ejercicio). Sin embargo, si los coeficientes $a(t)$ o $b(t)$ no pueden extenderse continuamente más allá de (a_1, a_2), porque presentan alguna singularidad en uno de los extremos, en general, las soluciones tampoco podrán ser prolongadas. Véanse los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

a) $x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$ (ninguna solución es regular cuando $t \to 0+$).

b) $x' = -\frac{1}{\sqrt{t}}x + e^{\frac{\sqrt{t}}{2}} \quad t > 0$ (todas son regulares en $t \to 0+$).

c) $x' = -\frac{1}{t}x + \cos t + \frac{\operatorname{sen}\, t}{t} \quad t > 0$ (algunas de las soluciones son regulares cuando $t \to 0+$).

Ecuaciones de Bernouilli y Riccati

Tras el caso lineal, donde el segundo miembro $f(t,x)$ de una ecuación escalar es lineal en x, el siguiente nivel en complejidad corresponde a $f(t,x)$ polinómica en x:

$$f(t,x) = a_0(t) + a_1(t)x + \cdots + a_n(t)x^n,$$

donde los coeficientes $a_i(t)$, $1 \leq \ i \leq \ n$, son funciones continuas de t en un intervalo $(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}$. Sin embargo esta es una clase demasiado amplia de ecuaciones como para poder ser estudiada desde el punto de vista elemental del presente capítulo. De hecho, el único caso que es integrable elementalmente es

$$x' = a_1(t)x + a_n(t)x^n, \quad (n \geq \ 2).$$

Dicha ecuación (llamada de *Bernouilli*) se trata mediante el cambio de variable,

$$y(t) = x(t)^{1-n},$$

para llegar a:

$$y' = (1-n)a_1 y + (1-n)a_n.$$

El problema:

$$\begin{cases} x' = a_1(t)x + a_n(t)x^n \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{P}$$

es equivalente entonces a:

$$\begin{cases} y' = (1-n)a_1(t)y + (1-n)a_n(t)y^n \\ y(t_0) = x_0^{1-n}, \end{cases}$$

siempre que $x_0 \neq 0$. Obsérvese que si $x_0 = 0$, $x(t) \equiv 0$ es la solución del problema (P). Como en el caso de la ecuación logística, se demuestra que $\forall x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in (a_1, a_2)$, (P) admite una única solución.

Si $a_0(t) \not\equiv 0$ en la expresión de $f(t,x)$ correspondiente a $n = 2$ la ecuación resultante tiene la forma

$$x' = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2,$$

y se la llama ecuación de *Riccati*. A mediados del siglo XIX Liouville demostró la imposibilidad de integrar elementalmente dicha ecuación. Es decir, expresar sus soluciones como el resultado de aplicar un número finito de veces los operadores algebraicos estándar y el de integración sobre las funciones elementales (la exponencial, las trigonmétricas, y sus inversas) y los coeficientes de la ecuación.

Sin embargo, si se conoce explícitamente una solución $x_0(t)$ de la ecuación de Riccati, entonces ésta se puede integrar elementalmente. En efecto, el cambio $y(t) = x(t) - x_0(t)$ lleva a la ecuación de Bernouilli siguiente,

$$y'(t) = (a_1(t) + 2a_2(t)x_0(t))y + a_2(t)y^2.$$

Ejemplo
Estúdiense las soluciones de la siguiente ecuación,

$$x' = -tx + x^2 + 1.$$

Ecuaciones Exactas. En términos generales se dice que una una ecuación escalar $x' = f(t,x)$ es exacta en Ω si sus soluciones $x(t)$ hacen constante a una cierta función escalar, es decir:

$$V(t,x) = c \qquad (c \text{ constante}), \tag{E}$$

para una cierta función $V(t,x)$, de clase C^1 en Ω. Por tanto, las soluciones x han de cumplir la ecuación:

$$V_t + V_x x' = 0.$$

Sin embargo, la naturaleza local de las herramientas que vamos a utilizar, requiere una definición más flexible.

Definición. Sean $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ continuas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $Q(t,x) \neq 0$ para cada $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Se dice que la ecuación diferencial $x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ es *exacta* en Ω si $\forall (t,x) \in \Omega$, $\exists U \subset \Omega$, entorno abierto de (t,x) y $V(t,x) \in C^1(U, \mathbb{R})$ (V posiblemente dependiente de U) tales que $P = V_t$ y $Q = -V_x$ en U.

Teorema. *Supongamos que la ecuación diferencial* $x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ *es exacta en* Ω. *Entonces,* $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ *el problema,*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{P(t,x)}{Q(t,x)} \\ x(t_0, x_0) = x_0, \end{cases}$$

admite una única solución que localmente puede escribirse en la forma,

$$V(t,x) = c \quad (\textit{constante}).$$

Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, y sean $P, Q \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ tales que,*

$$P_x + Q_t = 0 \quad en\ \Omega.$$

Entonces, la ecuación diferencial $x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ es exacta en Ω.

Observaciones.
a) Es frecuente encontrar las ecuaciones exactas expresadas en la forma,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{A}$$

Este tipo de ecuación debe interpretarse geométricamente como la que satisfacen las curvas del plano cuyo vector tangente (dx, dy) es, en cada punto, ortogonal al vector:

$$(M(x,y), N(x,y)).$$

Exceptúando quizás algunos puntos excepcionales, dichas curvas son las soluciones de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\,. \tag{B}$$

Por eso (A) es exacta si $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Sin embargo, si $V(x,y)$ es una función que satisface las ecuaciones $V_x = M$ y $V_y = N$, no debe leerse (A) como la anulación de la diferencial de V (que implicaría que V es constante). Lo que sí sucede es que V es constante sobre las soluciones de (B).
b) De la demostración se desprende que una posible solución $V(t,x)$ del sistema de ecuaciones: $V_t = -P(t,x)$, $V_x = Q(t,x)$ (hay infinitas soluciones $V(t,x)$ que en cada componente conexa de Ω se diferencian en una constante) es:

$$V_1(t,x) = -\int_{t_0}^{t} P(\theta, x_0)\ d\theta + \int_{x_0}^{x} Q(t,s)\ ds,$$

o también,

$$V_2(t,x) = -\int_{t_0}^{t} P(\theta, x)\ d\theta + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,s)\ ds.$$

Ambas expresiones coinciden en un entorno de (t_0, x_0). Podría pensarse que su valor común $V(t,x)$ puede extenderse a todo el dominio Ω. Sin embargo, una condición necesaria y suficiente para que esto suceda es que Ω sea *simplemente conexo.*

En este caso podemos definir $V(t,x)$ como:

$$V(t,x) = \int_{\Gamma} -P\ dt + Q\ dx,$$

donde Γ es cualquier arco continuo que conecte (t_0, x_0) con (t,x). Si Ω no es simplemente conexo la afirmación es falsa como muestra es siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

No existe una función C^1, $V = V(x, y)$, definida en todo Ω tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

En efecto, si tal V existe y Γ es la circunferencia de radio $\varepsilon \in (0, 1)$ orientada positivamente, por ejemlo $(x, y) = \varepsilon(\cos t, \varepsilon \text{ sen } t)$, $0 \leq t < 2\pi$, resulta que:

$$\int_\Gamma -\frac{y}{x^2 + y^2}\ dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\ dy = 2\pi.$$

Sin embargo, tal integral debería ser cero pues:

$$\int_\Gamma -\frac{y}{x^2 + y^2}\ dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\ dy = \int_0^{2\pi} \{V_x x' + V_y y'\}\ dt = 0.$$

Por tanto V no puede existir.

Un dominio maximal dentro de Ω donde puede construirse V es por ejemplo Ω menos un radio.

Factores integrantes.

Se deduce del teorema previo que, en general, no todas las ecuaciones son exactas. Sin embargo, dada la ecuación:

$$x' = \frac{P(t, x)}{Q(t, x)}, \tag{C}$$

con P y Q definidas y continuas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se dice que una cierta función real $\mu = \mu(t, x)$ es un factor integrante de (C) si la ecuación equivalente:

$$x' = \frac{\mu P(t, x)}{\mu Q(t, x)},$$

es exacta en Ω. Siendo μ, P y Q de clase C^1 en Ω es evidente que:

$$(\mu P)_x + (\mu Q)_t = 0,$$

constituye una condición necesaria y suficiente para que $\mu(t, x)$ sea un factor integrante de (C) es. Tal relación define una ecuación en derivadas parciales de primer orden. Puede probarse que siempre existen tales factores integrantes, aunque en la generalidad de los casos no pueden calcularse explícitamente. Por otra parte, se demuestra en un curso de ecuaciones en derivadas parciales que la resolubilidad de tal ecuación para μ equivale a la de la ecuación original (C) (método de las carcterísticas). Es decir, el tratamiento de los factores integrantes no simplifica el problema de la existencia de soluciones.

Ejemplos. La ecuación,

$$x' = \frac{2t + \dfrac{1}{x}}{\dfrac{t}{x^2} - \dfrac{1}{x}} \qquad ('= \frac{d}{dt})$$

es exacta.

La ecuación:

$$y' = -\frac{xy^2 + x^2y^2 + 3}{x^2y} \qquad ('= \frac{d}{dx})$$

admite a $\mu(x,y) = e^{-2x}$ como factor integrante.

4. Ejercicios complementarios

1. Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} = \frac{t+u+1}{t-u+3}.$$

Estudiar un cambio de variable de la forma $U = u + k$, $\tau = t + k$ que permita resolver la ecuación.

2. Demuéstrese que la ecuación diferencial,

$$\frac{du}{dt} = \frac{at + bu + m}{ct + du + n},$$

puede reducirse a casos elementales. Para ello es conveniente distinguir entre $ad - bc \neq 0$ y $ad - bc = 0$. Estúdiense como aplicación las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

$$(1 + t - 2y) + (4t - 3y - 6)y' = 0 \qquad (t + 2y + 3) + (2t + 4y - 1)y' = 0.$$

3. Para P, $Q \in C^1(\Omega)$ se considera la ecuación $P(x,y) + Q(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$, la cual suponemos es exacta. Pruébese que $P(x,y) - \int_{y_0}^{y} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,s)\, ds$ es una función que sólo depende de la variable x.

4. Sean Γ y Γ' dos curvas planas. Se dice que Γ' es homotética a Γ si existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma'$ cuando $(x,y) \in \Gamma$ y recíprocamente, $(\dfrac{x}{\lambda}, \dfrac{y}{\lambda}) \in \Gamma$ siempre que $(x,y) \in \Gamma'$. Probar que las curvas definidas por dos soluciones de una ecuación homgénea:

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}),$$

son siempre homotéticas. Discútase el caso de la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.