

1. Pruébese que $f(x) = x^3$ es lipschitziana en $[0, 1]$.
2. Estúdiese si las siguientes funciones f verifican alguna condición de Lipschitz local o global respecto a x :

- (1) $f(t, x) = 1 + x^2$
- (2) $f(t, x) = 1 + t^2$
- (3) $f(t, x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

3. Demuéstrese que $f(x) = x^{1/3}$ no es localmente lipschitziana en $[-1, 1]$.

4. Demostrar que existe una única función continua $f \in C[0, 1]$ que para cada $t \in [0, 1]$ satisface la identidad:

$$f(t) = \frac{1}{3} \int_0^t s^2 \operatorname{sen} f(s) \, ds.$$

¿Cómo se podría calcular esta función?

5. Determinar por el método de aproximaciones sucesivas la solución de la ecuación diferencial

$$y' = 2y(1 + x)$$

que verifica el dato $y(-1) = 1$.

6. ¿Se puede aplicar el teorema de Picard-Lindelöf a la ecuación

$$y' = y + \sqrt{|x|} \, ?$$

7. Considérese el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

- (1) Aplicar el método de aproximaciones sucesivas y calcular $y_4(t)$.
- (2) Demostrar que toda función aproximante $y_n(t)$ está definida en todo el eje real.
- (3) Resolver la ecuación diferencial, y demostrar así que existe una solución del problema $y(t)$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, y ninguna en un intervalo más amplio.

8. Aplíquese el método de aproximaciones sucesivas a los problemas:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

$$(b) \quad \begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

$$(c) \quad \begin{cases} x' = -x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

9. Dése una estimación del error cometido cuando se utiliza la función k -ésima $x_k(t)$ obtenida por el método de las aproximaciones sucesivas en el intervalo $[a, b]$ para el problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Como aplicación hállese dicho error para el problema,

$$\begin{cases} x' = t - x \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

estimando la diferencia $|x(0'2) - x_k(0'2)|$.

10. Se considera el problema,

$$\begin{cases} x' = f(x) + \sin x \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 . Demuéstrese que admite una única solución que es además de clase C^3 .

11. Sean $a_0(t), \dots, a_n(t)$ funciones continuas sobre el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Discútase la existencia y unicidad de soluciones del problema

$$\begin{cases} x'(t) = a_0(t) + a_1(t)x + \dots + a_n(t)x^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad a < t_0 < b.$$

¿Se puede asegurar en general que el dominio de existencia de las soluciones es $(\alpha, \omega) = (a, b)$?

12. Sea $A = A(t)$ una función matricial continua y $b = b(t) \in \mathbb{R}^n$ también continua y ambas definidas en el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Demuéstrese que el problema:

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite una única solución, que está definida en la totalidad del intervalo (a, b) .

13. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitziana mientras $x = x(t)$ es una solución de $x' = f(x)$ que satisface $x(t_0 + T) = x(t_0)$ para algún $T > 0$. Demuéstrese que $x = x(t)$ es periódica de periodo T . ¿Qué se puede decir si $n = 1$?

14. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ existe $L(t) \geq 0$ tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)|x - y| \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Suponiendo que $L = L(t)$ es continua, demuéstrese que el problema,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ una única solución definida en todo $\mathbb{R}$.

15. En $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ se considera la función $f(t, x) = \sin t(\log t) \sin^2 x$. Analícense las propiedades de existencia, unicidad y prolongación de las soluciones del problema de Cauchy asociado a la ecuación $x' = f(t, x)$.

16. Para $t \geq 0$ y $x \geq 0$ se considera la función

$$f(t, x) = \begin{cases} x \log \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Estúdiense la existencia y unicidad de soluciones del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

17. En cada uno de los siguientes problemas de Cauchy estúdiense la existencia, unicidad y prolongación de soluciones.

(1)

$$\begin{cases} x' = \sqrt{1 - x^2} \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde $-1 \leq x_0 \leq 1$. Tómesese $\Omega = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ como dominio de definición del segundo miembro.

(2)

$$\begin{cases} x' = (\log t)x^\alpha \\ x(1) = x_0, \end{cases} \quad \alpha > 1 \quad x_0 > 0.$$

(3)

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & |x| < 1 \\ 1 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|t|}(1+x^2) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen} x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

(6)

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad \alpha > 1.$$

(7)

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \geq 0,$$

donde $x \geq 0$, $f(x) = x^2 \log(\frac{1}{x})$ si $x > 0$, $f(0) = 0$.

18. Sea $x(t)$ una solución de la ecuación autónoma en $\mathbb{R}^n$, $x' = f(x)$. Pruébese que $y(t) = x(t+k)$ también es solución para toda constante $k \in \mathbb{R}$.

19. Para $(t, x) \in \bar{\Omega} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ se considera $f(t, x) = -\sqrt{1-x^2}$. Hállense todas las soluciones del problema,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

20. Estúdiese el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\pi}{2(1-t^2)}\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

21. Se considera el problema

$$\begin{cases} x'^2 - 2\sqrt{t^3}x' + tx^2 = 0 \\ x(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(1) ¿Admite soluciones?

(2) ¿Cuántas soluciones posee?

(3) ¿Cuál es el dominio de existencia de las soluciones?

22. Consideremos el problema

$$\begin{cases} y' = xy + y^k \\ y(0) = A, \end{cases}$$

$k > 1$, $A > 0$. Demuéstrese que la solución maximal del problema es creciente y positiva, y está definida en un intervalo de la forma $[0, \omega)$, $\omega < +\infty$. Cumple además

$$\lim_{x \rightarrow \omega^-} y(x) = +\infty.$$

23. Sea $a = a(t)$ continua en $[0, +\infty)$ de forma que $a(t) \geq 2t$ para $t \geq 0$. Demuéstrese que el problema

$$\begin{cases} x' = a(t)(1 + x^2) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admite una única solución maximal $x(t)$ definida en $[0, \omega)$ donde $\omega < +\infty$.

24. Estúdiese la finitud del extremo derecho ω del intervalo maximal de existencia (α, ω) de la solución del problema,

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 + x_2 & x_1(0) = 1 \\ x'_2 = x_1 + x_2^2 & x_2(0) = 1. \end{cases}$$

25. Sea

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

continua y supongamos que el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

no satisface la propiedad de unicidad de soluciones. Demuéstrese que entonces necesariamente ha de ser:

$$f(x_0) = 0.$$

26. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y C^1 en $x > 0$. Admítase que el problema

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

no tiene la propiedad de unicidad de soluciones. Pruébese entonces que:

$$\limsup_{x \rightarrow 0^+} |f'(x)| = +\infty.$$

27. Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, y $\mathcal{S} = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ es solución de } x' = f(t, x), x(t_0) = x_0\}$. Demuéstrese que para $t_1 \geq t_0$ el conjunto $I(t_1) = \{x(t_1) : x \in \mathcal{S}\}$ es un intervalo cerrado y acotado (teorema de Kneser-Hukuhara).