ANALISIS MATEMATICO V. Curso 2003-2004.

Capítulo I.

Introducción

1. Escribir como una única ecuación de orden dos los siguientes sistemas:

$$(a)\ \begin{cases} x' = y^2 + 2 \\ y' = x - 2xy \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x' = y \\ y' = e^t + 5x. \end{cases}$$

2. Escribir como una ecuación de primer orden las siguientes ecuaciones:

(1) $y'' + 2y' - y = e^t$
(2) $y''' - 4(y')^2 + \operatorname{sen} x = 3 - y$
(3) $x'' + f(x) = 0$

3. Determínense los valores de r para que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan solución de la forma $y = e^{rx}$.

(1) $y' + 2y = 0.$
(2) $y'' + y' - 6y = 0.$
(3) $y'' - y = 0.$
(4) $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

4. Determínense los valores de p para que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan solución de la forma $y = x^p$.

(1) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0.$
(2) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0.$

5. Trácese el campo de direcciones de la ecuación:

$$x' = t^2 + x,$$

esbozando la gráfica aproximada de las soluciones.

6. Dada la ecuación:

$$x' = 1 + t - x,$$

hállese el campo de direcciones. Demuéstrese que $x(t) = t$ es una solución y dése la forma aproximada de las soluciones.

7. Aplicando el método de isoclinas, trazar aproximadamente las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes.

(1) $y' = -\frac{y}{x}.$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(2) $y' = y$.
(3) $y' = x + y$.
(4) $y' = x^2 + y$.

8. Resolver aproximadamente, usando el método de Euler, los siguientes problemas de Cauchy, en los intervalos especificados y con el paso dado.

(1) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$, $x \in [1, 4]$, $h = 0'5$.
(2) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, $h = 0'1$.
(3) $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, $h = 0'1$.

9. Siguiendo la pauta de la introducción a la asignatura demuéstrese que para cada t_0 y valores x_0 y v_0 el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0, \end{cases}$$

admite una única solución.

10. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = \sqrt{|x|}.$$

¿Es $x(t) = t^2/4$ es una solución?. ¿Lo es en algún intervalo I de $\mathbb{R}$?. Determinar el mayor de tales intervalos I.

(1) Demostrar que existen infinitas soluciones que satisfacen $x(0) = 0$. *Indicación*: probar que si $x(t)$ es solución $y(t) = x(t - t_0)$ lo es, cualquiera que sea t_0.
(2) ¿Para qué valores de α existen infinitas soluciones en $[0, \alpha]$ cumpliendo $x(0) = -1$?

11. Para k y α constantes positivas estúdiense las soluciones de la ecuación:

$$x' = kx(\alpha - x),$$

sin resolverla.

Integración elemental

12. Resolver las siguientes ecuaciones en variables separadas:

$(a)\quad \dfrac{dy}{dt} + y\cos t = 0.$	$(b)\quad y' = (1+t)(1+y)$
$(c)\quad y' = e^{t+y+3}$	$(d)\quad \cos y \ \operatorname{sen} t \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} y \ \cos t$
$(e)\quad \dfrac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2$	$(f)\quad t^2(1+y^2) + 2yy' = 0$

13. Resolver los siguientes problemas de Cauchy.

$$
\begin{array}{lll}
(a) & t^2(1+y)^2 + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0, & y(0)=0 \\
(b) & \cos y\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t\ \mathrm{sen}\ y}{1+t^2}, & y(1)=\dfrac{\pi}{2} \\
(c) & 3t\dfrac{dy}{dt} = y\ \ \cos t, & y(1)=0 \\
(d) & \dfrac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}y = 0, & y(0)=\sqrt{5} \\
(e) & \quad\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{y+yt^2}, & y(2)=3 \\
(f) & \dfrac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y), & y(0)=0\ (a,b>0) \\
(g) & (1+t^2)^{1/2}\dfrac{dy}{dt} = ty^3(1+t^2)^{-1/2}, & y(0)=1.
\end{array}
$$

14. Está nevando con regularidad. A las 12 sale una máquina quitanieves que retira una cantidad constante de nieve por unidad de tiempo. En la primera hora recorre 2 kms y en la siguiente sólo uno. ¿A qué hora empezó a nevar?

15. Comprobar que las siguientes ecuaciones son homogéneas, y resolverlas:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & y' = \dfrac{y^2+2ty}{y^2} & (b) & y' = \dfrac{y^3+t^3}{y^2t+t^3} \\
(c) & xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y & (d) & y' = \dfrac{e^{t+y}}{e^{t-y}} \\
(e) & y' = \dfrac{y^3}{xy^2-x^3} & (f) & y' = \dfrac{(t^2+2ty+y^2)^{1/2}}{t+y}.
\end{array}
$$

16. Hallar la solución de los siguientes problemas de Cauchy:

$$
\begin{array}{lll}
(a) & 4x^2+xy-3y^2+y'(-5x^2+2xy+y^2)=0, & y(1)=1 \\
(b) & x' = \dfrac{2tx}{3t^2-x^2}, & x(1)=1 \\
(c) & 2ty'(t^2+y^2) = y(y^2+2t^2), & y(1)=1 \\
(d) & (y^2-3x^2)dy + xydx = 0, & y(1)=1.
\end{array}
$$

17. Dos curvas planas $C = \{(x,y) : y = f(x),\ a < x < b\}$ y $C' = \{(x,y) : y = g(x),\ c < x < d\}$ se dicen homotéticas si existe $\lambda > 0$ (la razón de homotecia) tal que $C' = \{(\lambda x, \lambda y) : (x,y) \in C\}$. Pruébese que dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ecuación:

$$y' = f(\frac{y}{x}) \qquad x > 0,$$

distintas de rectas de la forma $y = mx$ son siempre homotéticas. ¿Bajo qué condiciones es $y = mx$ una solución de la ecuación?.

18. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2t}{1+t^2}y = \dfrac{1}{1+t^2} & (b) & \dfrac{dy}{dt} + t^2 y = 1 \\
(c) & \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{t}{1+t^2}y = 1 - \dfrac{t^3}{1+t^2}y & (d) & \dfrac{dy}{dt} + y = te^t \\
(e) & \dfrac{dy}{dt} + t^2 y = t^2 & (f) & (1+t^2)\dfrac{dy}{dt} + ty = t(1+t^2)^{5/2} \\
(g) & y' - y = 2xe^{x+x^2} & (h) & y' + \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{1}{2}(x+1)^3.
\end{array}
$$

19. Hallar la solución de los siguientes problemas de Cauchy:

$$
\begin{array}{lll}
(a) & (1+t^2)\dfrac{dy}{dt} + 4ty = t, & y(1) = \frac{1}{4} \\
(b) & \dfrac{dy}{dt} + ty = 1 + t, & y(\frac{3}{2}) = 0 \\
(c) & \dfrac{dy}{dt} - 2ty = 1, & y(0) = 1 \\
(d) & \dfrac{dy}{dt} - 2ty = t, & y(0) = 1 \\
(e) & \dfrac{dy}{dt} + y = \dfrac{1}{1+t^2}, & y(1) = 2 \\
(f) & y' + y\tan x = \sec x, & y(0) = 0 \\
(g) & y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x, & y(0) = 1.
\end{array}
$$

20. Demostrar que todas las soluciones de la ecuación $y' + ay = be^{-ct}$ donde a y c son constantes positivas, $b \in \mathbb{R}$, tienden a cero cuando $t \to +\infty$.

21. Dada la ecuación diferencial $y' + a(t)y = f(t)$ donde a y f son continuas en $\mathbb{R}$, $a(t) \geq c > 0$, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, prúebese que todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to +\infty$.

22. Hallar una solución continua del problema:

$$y' + y = g(t) \qquad y(0) = 0,$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

23. Resolver las siguientes ecuaciones de Bernouilli y de Riccati:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & (1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0 & (b) & x\dfrac{dy}{dx} - y = y^2 \log x \\
(c) & y^2(x+x^2) + 3 + x^2y\dfrac{dy}{dx} = 0 & (d) & x\dfrac{dy}{dx} + y = (x\log x)y^2 \\
(e) & (1-x^3)\dfrac{dy}{dx} + 2x + x^2y - y^2 = 0 & (f) & xy^2\dfrac{dy}{dx} + y^3 = \dfrac{a^3}{x}.
\end{array}
$$

24. Calcular la solución de los problemas de Cauchy:

$$
\begin{array}{lll}
(a) & y' = x^2 - 2xy + y^2, & y(0) = 1 \\
(b) & x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2), & y(2) = 2 \\
(c) & x(1-x^2)y' - x^2 + (x^2-1)y + y^2 = 0, & y(1) = 1 \\
(d) & y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^2, & y(0) = 1.
\end{array}
$$

25. Se considera la ecuación de Bernouilli

$$y' + a(t)y = b(t)y^n,$$

donde $t \in I$, I un cierto intervalo de interior no vacío. Escribir la ecuación en la forma $(\mu(t)y)' = b(t)\mu(t)y^n$ para una función $\mu(t)$. Escríbase ésta última como

$$(F(\mu(t)y))' = \tilde{b}(t)$$

e intégrese así la ecuación.

26. Resolver las siguientes ecuaciones exactas:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & 2t \text{ sen } y + y^3e^t + (t^2\cos y + 3y^2e^t)\dfrac{dy}{dt} = 0 \\
(b) & 1 + (1+ty)e^{ty} + (1+t^2e^{ty})\dfrac{dy}{dt} = 0 \\
(c) & y\sec^2 t + \sec t \tan t + (2y + \tan t)\dfrac{dy}{dt} = 0 \\
(d) & \left(\dfrac{y^2}{2} - 2ye^t\right)dt + (yt - 2e^t)dy = 0.
\end{array}
$$

27. Buscar un factor integrante para las siguientes ecuaciones, y resolverlas.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & ydx + (2x - ye^y)dy = 0 & (b) & y' = e^{2x} + y - 1 \\
(c) & (1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0 & (d) & x + y^2 - 2xyy' = 0.
\end{array}
$$

28. Resolver las siguientes ecuaciones, buscando un factor integrante como se indica:

$$\begin{array}{lll}
(a) & 3x^2 - t + (2x^3 - 6tx)x' = 0, & \mu = \mu(t + x^2) \\
(b) & x - 2y + 4 + (2x - 4y + 4)y' = 0, & \mu = \mu(x + \alpha y), \quad \alpha \text{ por determinar}, \\
(c) & xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0, & \mu = \mu(x^2 + y^2) \\
(d) & t^2y^3 + t(1 + y^2)y' = 0, & \mu = \frac{1}{t}\varphi(y).
\end{array}$$

29. Hállese la solución de los problemas de Cauchy siguientes.

$$\begin{array}{lll}
(a) & 3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)y' = 0, & y(0) = 1 \\
(b) & \cos 2te^{ty}y - 2 \text{ sen } 2te^{ty} + 2t + (t\cos 2te^{ty} - 3)y' = 0, & y(0) = 0 \\
(c) & 2t\cos y + 3t^2y + (t^3 - t^2 \text{ sen } y - y)y' = 0, & y(0) = 2 \\
(d) & 2ty + y^2 + (t^2 + 2ty)y' = 0, & y(2) = 1 \\
(e) & \dfrac{2x}{y^3}dx + \left(\dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\right)dy = 0, & y(1) = 1 \\
(f) & x + \text{ sen } x + \text{ sen } y + \cos y \; y' = 0, \qquad y(0) = 0 & \\
(g) & 2xy^2 - 3y^3 + (7 - 3xy^2)y' = 0, & y(1) = 1.
\end{array}$$

30. Hállense todas las $f(t)$ tales que la ecuación:

$$y^2 \text{ sen } t + yf(t)y' = 0$$

sea exacta.

31. Se sabe que la ecuación:

$$f(t)y' + t^2 + y = 0$$

admite a $\mu(t, y) = t$ como factor integrante. Hállense las funciones $f(t)$.

Problemas Geométricos

32. En cada uno de los siguientes casos, determinar una ecuación diferencial que satisfaga la familia en cuestión hallando una familia de curvas ortogonales a las de la familia dada.

(*a*) Circunferencias centradas en el origen.
(*b*) Circunferencias tangentes al eje OY en el origen.
(*c*) $xy = C$
(*d*) $y = Cx^2$
(*e*) $x^2 + 4y^2 = C^2$
(*f*) $y^2 = Cx^3$.

33. Hallar las curvas contenidas en el primer cuadrante tales que cada punto divide en partes iguales al segmento de tangente que queda en dicho cuadrante.

34. Dada la ecuación $y' = ax + by + c$, probar que los puntos tales que la tangente a la curva solución trazada por cada uno de ellos pasa por un punto dado (X_0, Y_0) forman la cónica de ecuación $(x - X_0)(ax + by + c) = y - Y_0$.

35. Obtener la ecuación de las curvas tales que la normal en cada punto y la recta que lo une con el origen forman un triángulo isósceles con el eje OX.

36. La normal a una curva en P corta al eje OX en un punto M, y al eje OY en un punto N. Sabiendo que la curva pasa por $(2, 1)$ y que M es el punto medio de PN, obtener la ecuación de la curva.

37. Hallar una curva $Y = y(x)$ para la que el área Q que delimita entre el eje OX, las rectas $x = 0$ y la recta vertical de abcisa x satisfaga la ecuación:

$$Q = a^2 \log \frac{y(x)}{a}.$$

38. Demuéstrese que una curva regular plana tal que todas sus normales pasan por un punto fijo es una circunferencia.

39. Demostrar que una curva regular plana tal que la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abcisa en dicho punto es una parábola.

40. Supongamos que en un espejo de ecuación $y = f(x)$ los rayos de luz se reflejan de forma que el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de reflexión. ¿Cuál es la forma del espejo si todos los rayos emanados desde un punto exterior V se reflejan paralelamente a una recta?

41. Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une ese punto con el origen de coordenadas.

42. Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje OY por la normal, es igual al doble del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

43. Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de ordenadas por la normal a cualquiera de sus puntos, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Ley de enfriamiento de Newton

44. Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en un medio es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del medio. Si la temperatura del medio es de 20γ C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100γ hasta 60γ, ¿dentro de cuanto tiempo su temperatura decenderá hasta 30γ?

45. Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es $20\gamma C$, al exterior, donde es de $10\gamma C$. Después de 30 seg., la temperatura es de $16\gamma C$. ¿Cuánto marca el termómetro después de 1 minuto? ¿Cuánto tiempo tardará el termómetro en alcanzar los $11\gamma C$?

46. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de $20\gamma C$, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcula el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los $90\gamma C$ si se sabe que su temperatura aumentó $2\gamma C$ en un segundo. ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los $98\gamma C$?

47. La temperatura del agua colocada en una habitación que se encuentra a 25γC baja de 100γC a 80γC en 10 minutos. Hállese la temperatura del agua al cabo de 20 minutos. ¿Cuándo será su temperatura de 40γC?

48. El cuerpo de una víctima de asesinato se descubrió a las 11 p.m. El médico forense llegó a las 11:30 p.m., e inmediatamente tomó la temperatura del cuerpo, que era de $34.8\gamma C$. Después de una hora, volvió a tomarla, y era de $34.1\gamma C$. Si la temperatura de la habitación era de $20\gamma C$, calcular la hora del asesinato.

Problemas de mezclas

49. Se disuelven 50 gramos de una sustancia en 300 litros de agua contenidos en un tanque. Por otro lado se introduce en el mismo una disolución de la misma sustancia en agua a una concentración de 2 gramos/litro y a razón de 3 litros/minuto (l/m), mientras la solución convenientemente homogeneizada se extrae a razón de 2 l/.

Si $C = C(t)$ designa la masa en gramos de la sustancia en el tanque pruébese que la ecuación que determina C es:

$$\frac{dC}{dt} = 6 - 2\frac{C}{300+t}.$$

50. En un tanque que tiene 1000 litros de agua, se vierten por bombeo desperdicios industriales a una velocidad de 1 litro por minuto, y la solución bien mezclada sale del tanque con la misma rapidez.

(a) Hallar la concentración del desperdicio en el tanque en el tiempo t.

(b) ¿Cuánto tiempo es necesario para que la concentración alcance el 20%?

51. Un tanque de 500 litros de capacidad contiene inicialmente 100 litros de agua pura. En el tiempo $t = 0$ fluye en el tanque agua con un contenido del 50% de contaminantes a una velocidad de 2 litros por minuto. La mezcla homogénea sale del tanque a una velocidad de 1 litro por minuto. Calcular la concentración de contaminantes en el tanque en el momento en que éste se derrama.

52. Cierta cantidad de una sustancia indisoluble contiene en sus poros 10 kg de sal. Actuando con 90 litros de agua se observó que durante 1 hora se disolvió la mitad de la sal contenida. ¿Cuánta sal se disolvería durante el mismo tiempo si se duplicase la cantidad de agua? La velocidad de disolución es proporcional a la cantidad de sal no disuelta y a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg para 3 litros).

53. Una habitación que contiene 1000 dm^3 de aire se encuentra inicialmente libre de monóxido de carbono (CO). En el tiempo $t = 0$ entra al cuarto humo de cigarrillos con un contenido de 4% de monóxido de carbono, y una velocidad de 0.1 dm por minuto. La mezcla homogeneizada sale del local a la misma velocidad. Calcular el tiempo para el cual la concentración de CO en el aire alcanza 0.012%.

54. Se ha comprobado que hay una concentración de $0'2\%$ de CO_2 en una galería subterránea de $150 \times 50 \times 12$ dm^3, por lo que se trata de renovar esa atmósfera con aire del exterior, cuya concentración de CO_2 es de $0'05\%$, mediante ventiladores a una velocidad de 9000 dm^3 por minuto. Hállese el porcentaje de CO_2 después de 20 minutos.

Reacciones químicas

56. Dos compuestos químicos A y B reaccionan de forma que un mol de A se combina con otro de B para dar un mol de C. Se sabe que la velocidad de producción de C es proporcional en cada instante al producto de las concentraciones de A y B presentes en el reactor (ley de acción de masas). Suponiendo conocidas las concentraciones iniciales A_0, B_0 junto con el valor de formación inicial $C'_0 = \frac{dC}{dt}$, determinar la concentración en función del tiempo.

57. Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar una sustancia C. La rapidez o velocidad de reacción es proporcional al producto de las cantidades de A y B que no han reaccionado. Inicialmente hay 40 gramos de A y 50 de B, y por cada gramo de B se usan dos de A. Se observa que se forman 10 gramos de C en 5 minutos. ¿Cuánto se formará en 20 minutos? ¿Cuál es la cantidad límite de C después de un tiempo largo? ¿Cuánto queda de las sustancias A y B después de un tiempo largo?

58. Resolver el problema precedente si inicialmente hay 100 gr. de la sustancia A. ¿Cuánto tardará en formarse la mitad de la sustancia C?

59. En ciertas reacciones, algunos productos X catalizan su propia formación. Si $x(t)$ es la concentración de X en el instante t, un modelo posible para este tipo de reacción es

$$\frac{dx}{dt} = x(c - x) ,$$

donde r y c son constantes positivas. En este modelo, la reacción se termina cuando $x = c$, presumiblemente porque uno de los reactantes se acaba.

a) Determinar la solución general en términos de r, c y $x(0)$.
b) Para $r = 1$, $c = 100$ y $x(0) = 20$, dibujar la solución $x(t)$ para $t > 0$.

Desintegración radiactiva

60. Inicialmente había 100 miligramos presentes de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa disminuyó en un 3%. Encontrar la cantidad que queda después de 24 horas.

61. La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Supóngase que un accidente nuclear ha provocado que el nivel de este cobalto ascienda en una región hasta 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la región vuelva a ser habitable?

62. De acuerdo con una teoría cosmológica, había igual cantidad de los dos isótopos del Uranio U^{225} y U^{238} en el momento del Big Bang. En el momento actual hay 47 átomos de U^{238} por cada uno de U^{225}. Sabiendo que la semivida del U^{238} es 4.5×10^9 años y la del U^{225} 0.71×10^9, dar una estimación de la edad del Universo. (El resultado del problema es bastante inferior a la edad del Universo, pero bastante próximo a la edad del planeta Tierra, por lo que se deduce que donde había igual cantidad de esas sustancias fue en el momento de formación de nuestro planeta.)

63. En 1950, se comprobó que cierta madera encontrada en la cueva de Lascaux (Francia) daba 0.97 desintegraciones (por minuto, por gramo). La madera viva da 6.68 desintegraciones. Estimar la fecha de formación de la madera.

Mecánica

64. Una bala se introduce en una tabla de $h = 10$ cm. de espesor con la velocidad $v_0 = 200$ m/seg traspasándola con la velocidad $v_1 = 80$ m/seg. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo que tarda la bala en atravesar la tabla.

65. Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 cm/seg, y después de 5 seg. su velocidad será 8 cm/seg. ¿Después de cuánto tiempo la velocidad se hará 1 m/seg?

66. Determinar el camino S recorrido por un cuerpo durante el tiempo t, si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 seg. el cuerpo recorre 100 m y en 15 seg, 200 m.

67. Dejamos caer una pequeña piedra en un pozo vertical de una cierta profundidad. Tardamos 6 segundos en oir el impacto en el fondo. Estimar su profundidad.

Dinámica de poblaciones

68. Se sabe que la población de una cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años, ¿Cuánto tardará en triplicarse?

69. Las bacterias de un cierto cultivo aumentan con una intensidad proporcional al número presente. Si en media hora el número de bacterias aumenta en un 50%, ¿en cuántas horas se puede esperar que haya el triple del número original?

70. Supóngase que una población duplica su tamaño original en 100 años y la triplica en 200. Demuéstrese que para dicha población no es aplicable la ley malthusiana de crecimiento poblacional.

71. Supóngase que $p(t)$ satisface la ley de Malthus de crecimiento de poblaciones. Demuéstrese que los incrementos de p en intervalos sucesivos de tiempo de igual duración, son los términos de una progresión geométrica. Esto dio origen a la famosa frase de Thomas Malthus: "Una población no controlada se incrementa en proporción geométrica. Los medios de subsistencia aumentan en proporción aritmética. Una habilidad mínima con los números hace ver la enormidad de la primera potencia en comparación con la segunda".

72. Una población crece de acuerdo con la ley logística, y tiene un límite de 5×10^8 individuos. Cuando la población es baja se duplica cada 40 minutos. ¿Qué valor tendrá la población después de 2 horas si inicialmente era de 10^8?

73. La población de U.R.S.S. era de 209 millones en 1959, y se estimó que crecía exponencialmente en un 1% por año. Encontrar el valor predicho para 1980. ¿Cuándo será la población el doble que en 1959?

74. Investigar el modelo de crecimiento de una población N descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left\{ 1 - \left(\frac{N}{N_\infty} \right)^{\alpha - 1} \right\}$$

con $\alpha > 1$. Resolver la ecuación y dibujar aproximadamente las soluciones.

75. Una población inicial de 50.000 habitantes vive en un microcosmos con una capacidad de soporte para 100.000. Después de cinco años, la población se ha incrementado a 60.000. Demostrar que la tasa natural de crecimiento de esta población es

$$\frac{1}{5} \log \frac{3}{2} \, .$$

76. Despreciando las tasas de emigración y de homicidio, la población de la ciudad de

Nueva York satisface la siguiente ley logística

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p - \frac{1}{25 \cdot 10^6}p^2 \ ,$$

donde t se mide en años.

(a) Modificar la ecuación para tomar en cuenta el hecho de que 9000 personas se mudan anualmente fuera de la ciudad, y de que 1000 personas son asesinadas en el mismo periodo.

(b) Suponiendo que la población de Nueva York en 1970 era de 8.000.000 de personas, calcular la población para el futuro. ¿Qué sucede cuando $t \to +\infty$?