1.Expresar las integrales siguientes en el orden indicado en cada caso.

$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$, en el orden z, y, x.

$\int_0^4 \int_0^{\frac{4-x}{2}} \int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, en el orden y, x, z.

Solución: (a) $\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$; (b) $\int_0^3 \int_0^{\frac{12-4z}{3}} \int_0^{\frac{12-3x-4z}{6}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$.

2.Integrar cambiando el orden de todas las formas posibles:

$$\text{(a)} \int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx; \qquad \text{(b)} \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Solución:

$\int_0^1 \int_0^x \int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$; $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$; $\int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$;

$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; $\int_0^1 \int_z^1 \int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$.

$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx + \int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} \int_{\sqrt{z-x^2}}^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$;

$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$;

$\int_0^1 \int_0^{2y^2} \int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy + \int_0^1 \int_{2y^2}^{1+y^2} \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$;

$\int_0^1 \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^{\sqrt{z}} \int_{\sqrt{z-x^2}}^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz + \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz +$

$\int_1^2 \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1 \int_{\sqrt{z-x^2}}^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$;

$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{z}{2}}} \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int_0^1 \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1 \int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz +$

$\int_1^2 \int_{\sqrt{z-1}}^{\sqrt{\frac{z}{2}}} \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int_1^2 \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1 \int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

3.Evaluar $\int\int\int_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ para las siguientes funciones f y recintos W:

$f(x,y,z) = ze^{x+y}, \quad W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

$f(x,y,z) = 2x+3y+z, \quad W = [1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

$f(x,y,z) = e^{-xy}y, \quad W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

$f(x,y,z) = \frac{z^2y-zx^2-zx^4}{1+x^2}, \quad W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Solución: (a)$\frac{1}{2}(e-1)^2$; (b) 7; (c) $\frac{1}{e}$; (d) $\frac{\pi-4}{24}$.

4.Calcular la integral triple $\int\int\int_M \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, donde el recinto M está limitado por las superficies $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Solución: $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$.

5.Hallar $\int\int\int_D yz\,dx\,dy\,dz$, si D es el recinto limitado por los planos coordenados y los planos $x+y=1$, $z=4$.

Solución: $\frac{4}{3}$.

6.Calcular $\int\int\int_M xyz\; dx\; dy\; dz$, siendo M el recinto limitado por las superficies:

$x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y = z^2$, $z = 0$;

$x^2 + y^2 - 2z = 0$, $y = z^2$.

Solución: (a) $\frac{\pi}{16}$; (b) 0.

7.Hallar $\int\int\int_D yz\; dz\; dy\; dx$, siendo D el primer octante del sólido delimitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución: $\frac{ab^2c^2}{15}$.

8.Mediante un cambio de variable a coordenadas cilíndricas, calcúlense las siguientes integrales:

$\int\int\int_D (x^2 + y^2)^2\; dx\; dy\; dz$, $D = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2z \leq 4\big\}$.

$\int\int\int_D z \exp\{-(x^2 + y^2)\}\; dx\; dy\; dz$, $D = \big\{(x, y, z) : 2(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq x^2 + y^2 + 1,\; z \geq 0\big\}$.

Solución: (a) $\frac{32\pi}{3}$; (b) $\frac{\pi}{2e}$.

9.Hallar $\int\int\int_D z\; dx\; dy\; dz$, siendo $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\; z \geq 0\big\}$.

Solución: $\frac{\pi}{8}$.

10.Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

Solución: $\frac{5\pi}{2}(e^4 - 1)$.

11.Mediante un cambio de variable a coordenadas esféricas, calcúlense las siguientes integrales:

$\int\int\int_D xyz\; dx\; dy\; dz$, $D = \big\{(x, y, z) : x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}$.

$\int\int\int_D (x^2 + y^2 + z^2)\; dx\; dy\; dz$, $D = \big\{(x, y, z) : 2az \leq x^2 + y^2,\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\big\}$.

Solución: (a) $\frac{1}{48}$; (b) $\frac{2\pi}{5}a^5\left(9\sqrt{3} + \frac{97}{12}\right)$.

12.Sea B la esfera unidad. Evaluar $\int\int\int_B \frac{dx\; dy\; dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$.

Solución: $4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

13.Calcular $\int\int\int_S \frac{dx\; dy\; dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, siendo S el sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2+z^2 = b^2$, con $0 < b < a$.

Solución: $4\pi \ln\frac{a}{b}$.

14.Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 - ay = 0$.

Solución: $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\right)a^3$.

15.Hallar el volumen del recinto $D = \left\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.

Solución: 3π.

16.Calcular el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución: $\frac{4\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

17.Hallar el volumen de la región acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

Solución: $25\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

18. Calcular la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución: 3π.