

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas:

$$(a) \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx \quad (b) \int_0^1 \int_0^1 xy e^{x+y} dy dx$$

$$(c) \int_{-1}^1 \int_1^2 (-x \ln y) dy dx \quad (d) \int_0^1 \int_0^1 \ln[(x+1)(y+1)] dx dy.$$

Solución: (a) $\frac{13}{15}$; (b) 1; (c) 0; (d) $4 \ln 2 - 2$.

2. Evaluar las siguientes integrales iteradas y trazar las regiones determinadas por los límites:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx \quad (b) \int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y) dy dx \quad (c) \int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$$

$$(d) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx \quad (e) \int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx \quad (f) \int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy dx.$$

Solución: (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{e^2-1}{4}$; (c) $\frac{7895}{84}$; (d) $\frac{1}{6}$; (e) $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{3e^3} - \frac{5}{6}$; (f) $-\frac{2}{3}$.

3. Cambiar el orden de integración en cada una de las integrales siguientes:

$$(a) \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx \quad (b) \int_0^1 \int_{-y}^y f(x, y) dx dy \quad (c) \int_1^4 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx.$$

Solución: (a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx dy$; (b) $\int_{-1}^0 \int_{-x}^1 f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_x^1 f(x, y) dy dx$;

$$(c) \int_1^2 \int_1^y f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx dy + \int_4^8 \int_{\frac{y}{2}}^4 f(x, y) dx dy.$$

4. Cambiar el orden de integración en las integrales del problema 2 y evaluarlas.

Solución: (a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx dy = \frac{1}{3}$; (b) $\int_1^e \int_{\ln y}^1 (x+y) dx dy = \frac{e^2-1}{4}$;

$$(c) \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 (x^2 + y) dy dx + \int_0^4 \int_{-3}^{-\sqrt{x}} (x^2 + y) dy dx + \int_4^9 \int_{-3}^{-\sqrt{x}} (x^2 + y) dy dx = \frac{7895}{84}$$

$$(d) \int_0^1 \int_0^{\arccos y} y \sin x dx dy = \frac{1}{6}$$

$$(e) \int_{-2}^0 \int_{-1}^{\frac{y}{2}} e^{x+y} dx dy + \int_{-2}^0 \int_{-\frac{y}{2}}^1 e^{x+y} dx dy + \int_0^1 \int_{-1}^{-y} e^{x+y} dx dy + \int_0^1 \int_y^1 e^{x+y} dx dy = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{3e^3} - \frac{5}{6}$$

$$(f) \int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{4-y^2} x dx dy = -\frac{2}{3}.$$

5. Cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y evaluar las integrales de las dos maneras:

$$(a) \int_0^1 \int_x^1 xy dy dx \quad (b) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr d\theta$$

$$(c) \int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy \quad (d) \int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 dx dy.$$

Solución: (a) $\frac{1}{8}$; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) $e^4 - 1$; (d) $\frac{43\sqrt{2}}{6} + \frac{81}{4} \arcsen \frac{1}{3} + \frac{81\pi}{8}$.

6. Evaluar las siguientes integrales en los recintos que se indican:

$$(a) \int_R (x^2 + y^2) dV, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]. \quad (b) \int_R \sin(x+y) dV, \quad R = [0, 1] \times [0, 1].$$

$$(c) \int_R (-xe^x \sin \frac{\pi y}{2}) dV, \quad R = [0, 2] \times [-1, 0]. \quad (d) \int_R |y| \cos \frac{\pi x}{4} dV, \quad R = [0, 2] \times [-1, 0].$$

Solución: (a) $\frac{2}{3}$; (b) $2 \sin 1 - \sin 2$; (c) $\frac{2}{\pi} (1 + e^2)$; (d) $\frac{2}{\pi}$.

7. Sea $I = [0, 2] \times [0, 3]$. Calcular $\int_I (x^2 + 4y) \, dx \, dy$.

Solución: 44.

8. Sea D el recinto plano limitado por las rectas $y = 0$, $y = 1$, $x = -1$, $x = y$. Hallar

$$\int \int_D (xy - y^3) \, dx \, dy.$$

Solución: $-\frac{23}{40}$.

9. Calcular $\int \int_D (x^2 - y) \, dx \, dy$, siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$.

Solución: $\frac{4}{5}$.

10. Hallar $\int \int_D xy \, dx \, dy$, siendo D la región del primer cuadrante encerrada por las parábolas $y^2 = x$, $y = x^2$.

Solución: $\frac{1}{12}$.

11. Sea D la región acotada por las partes positivas de los ejes OX , OY y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular $\int_D (x^2 + y^2) \, dV$.

Solución: $\frac{15625}{1296}$.

12. Sea D la región dada como el conjunto de los puntos (x, y) del plano donde $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ e $y \geq 0$. Evaluar $\int_D (1 + xy) \, dV$.

Solución: $\frac{\pi}{2}$.

13. Hallar $\int \int_D xy \, dx \, dy$, siendo D el conjunto de los puntos (x, y) del plano que satisfacen $0 \leq y \leq x + 2$, $4x^2 + 9y^2 \leq 36$.

Solución: $\frac{23}{6}$.

14. Sea D el paralelogramo limitado por $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$. Calcular $\int \int_D (x + y)^2 \, dx \, dy$.

Solución: $\frac{1}{3}$.

15. Sea D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$. Hallar $\int \int_D xy \, dx \, dy$.

Solución: $\frac{15}{8}$.

16. Sea D la región $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$. Evaluar $\int \int_D (x + y) \, dx \, dy$ haciendo el cambio $x = u + v$, $y = u - v$.

Verificar la respuesta calculando directamente la integral mediante integrales iteradas.

Solución: $\frac{1}{2}$.

17. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (4u, 2u + 3v)$. Sea $D^* = [0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:

$$(a) \int \int_D xy \, dx \, dy, (b) \int \int_D (x - y) \, dx \, dy,$$

haciendo un cambio para evaluarlas como integrales sobre D^* .

Solución: $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, \frac{x}{2} + 3 \leq y \leq \frac{x}{2} + 6\}$; (a) 140; (b) -42.

18. Sea D el círculo unidad. Evaluar $\int \int_D e^{x^2+y^2} dx dy$ haciendo un cambio de variables a coordenadas polares.

Solución: $\pi(e - 1)$.

19. Mediante un cambio de variable a coordenadas polares, calcúlense las siguientes integrales:

$\int \int_D (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy$, donde D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

$\int \int_D (x^3 + y^3) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.

Solución: (a) $\frac{\pi}{12}$; (b) $\frac{1}{960} (203 + 453\sqrt{3} - 280\pi)$.

20. Calcular $\int \int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

Solución: $\frac{64\pi}{5}$.

21. Hallar $\int \int_D (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) dx dy$, donde D es el recinto acotado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$).

Solución: $\frac{\pi ab}{2}$.

22. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r .

Solución: πr^2 .

23. Hallar el área del recinto encerrado por una elipse de semiejes a y b .

Solución: πab .

24. Hallar el área comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$, $y = 0$.

Solución: $\frac{3}{2} (\frac{\pi}{2} + 1)$.

25. Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.

Solución: 6.

26. Usar integrales dobles para calcular el volumen de una esfera de radio r .

Solución: $\frac{4\pi r^3}{3}$.

27. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano OXY , el plano OYZ , el plano OXZ , los planos $x = 1$, $y = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

Solución: $\frac{2}{3}$.

28. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [1, 2]$ y los lados verticales de R .

Solución: $\frac{11}{6}$.