1. Evaluar las siguientes integrales iteradas:

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4y+y^2)dy\,dx \quad \text{(b)} \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} xye^{x+y}dy\,dx$$

$$\text{(c)} \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(-x\ln y)dy\,dx \quad \text{(d)} \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \ln\left[((x+1)(y+1)\right] dx\,dy.$$

Solución: (a) $\frac{13}{15}$; (b) 1; (c) 0; (d) $4\ln 2-2$.

2. Sea $I=[0,2]\times[0,3]$. Calcular $\int\int_I (x^2+4y)\,dx\,dy$.

   Solución: 44.

3. Evaluar las siguientes integrales en los recintos que se indican:

   (a) $\int_R (x^2+y^2)\,dA$, $R=[0,1]\times[0,1]$.

   (b) $\int_R \sin(x+y)\,dA$, $R=[0,1]\times[0,1]$.

   (c) $\int_R (-xe^x\sin\frac{\pi y}{2})\,dA$, $R=[0,2]\times[-1,0]$.

   (d) $\int_R |y|\cos\frac{\pi x}{4}\,dA$, $R=[0,2]\times[-1,0]$.

   Solución: (a) $\frac{2}{3}$; (b) $2\sin 1-\sin 2$; (c) $\frac{2}{\pi}\left(1+e^2\right)$; (d) $\frac{2}{\pi}$.

4. Evaluar las siguientes integrales iteradas y trazar las regiones determinadas por los límites:

$$\text{(a)} \int_0^1\int_0^{x^2} dy\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^1\int_1^{e^x}(x+y)dy\,dx \quad \text{(c)} \int_{-3}^{2}\int_0^{y^2}(x^2+y)dx\,dy$$

$$\text{(d)} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos x} y\sin x\,dy\,dx \quad \text{(e)} \int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dy\,dx \quad \text{(f)} \int_{-1}^{0}\int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\,dy\,dx.$$

Solución: (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{e^2-1}{4}$; (c) $\frac{7895}{84}$; (d) $\frac{1}{6}$; (e) $\frac{e^2}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{3e^3}-\frac{5}{6}$; (f) $-\frac{2}{3}$.

5. Sea D el recinto plano limitado por las rectas $y = 0$, $y = 1$, $x = -1$, $x = y$. Hallar
$$\int\int_D (xy - y^3)\, dx\, dy.$$
Solución: $-\dfrac{23}{40}$.

6. Calcular $\displaystyle\int\int_D (x^2 - y)\, dx\, dy$, siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$.

   Solución: $\dfrac{4}{5}$.

7. Hallar $\displaystyle\int\int_D xy\, dx\, dy$, siendo D la región del primer cuadrante encerrada por las parábolas $y^2 = x$, $y = x^2$.

   Solución: $\dfrac{1}{12}$.

8. Sea D la región acotada por las partes positivas de los ejes OX, OY y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2)\, dA$.

   Solución: $\dfrac{15625}{1296}$.

9. Sea D la región dada como el conjunto de los puntos (x, y) del plano donde $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ e $y \geq 0$. Evaluar $\displaystyle\int_D (1 + xy)\, dA$.

   Solución: $\dfrac{\pi}{2}$.

10. Hallar $\displaystyle\int\int_D xy\, dx\, dy$, siendo D el conjunto de los puntos (x, y) del plano que satisfacen
$$0 \leq y \leq x + 2, \quad 4x^2 + 9y^2 \leq 36.$$
Solución: $\dfrac{23}{6}$.

11. Cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y evaluar las integrales de las dos maneras:
$$\text{(a)} \int_0^1 \int_x^1 xy\, dy\, dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\, dr\, d\theta$$
$$\text{(c)} \int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\, dx\, dy \quad \text{(d)} \int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2\, dx\, dy.$$
Solución: (a) $\dfrac{1}{8}$; (b) $\dfrac{\pi}{4}$; (c) $e^4 - 1$; (d) $\dfrac{43\sqrt{2}}{6} + \dfrac{81}{4} \arcsin \dfrac{1}{3} + \dfrac{81\pi}{8}$.

12. Cambiar el orden de integración en cada una de las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^4}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$ (c) $\displaystyle\int_1^4\int_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$.

Solución: (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy\,dx+\int_0^1\int_{x}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$;
(c) $\displaystyle\int_1^2\int_1^y f(x,y)\,dx\,dy+\int_2^4\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy+\int_4^8\int_{\frac{y}{2}}^{4} f(x,y)\,dx\,dy$.

13. Cambiar el orden de integración en las integrales del problema 4 y evaluarlas.

Solución: (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{1} dxdy=\frac{1}{3}$;
(b) $\displaystyle\int_1^e\int_{\ln y}^{1}(x+y)dxdy=\frac{e^2-1}{4}$;
(c) $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^{2}(x^2+y)dydx+\int_0^4\int_{-3}^{-\sqrt{x}}(x^2+y)dydx+\int_4^9\int_{-3}^{-\sqrt{x}}(x^2+y)dydx=\frac{7895}{84}$;
(d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y} y\sin x\,dxdy=\frac{1}{6}$;
(e) $\displaystyle\int_{-2}^0\int_{-1}^{\frac{y}{2}} e^{x+y}dxdy+\int_{-2}^0\int_{-\frac{y}{2}}^{1} e^{x+y}dxdy+\int_0^1\int_{-1}^{-y} e^{x+y}dxdy+\int_0^1\int_y^1 e^{x+y}dxdy=$
$\displaystyle\frac{e^2}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{3e^3}-\frac{5}{6}$;
(*f*) $\displaystyle\int_0^2\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{0} x\,dxdy=-\frac{2}{3}$.

14. Sea D el paralelogramo limitado por $y=-x$, $y=-x+1$, $y=2x$, $y=2x-3$. Calcular $\displaystyle\int\int_D (x+y)^2\,dx\,dy$.

Solución: $\dfrac{1}{3}$.

15. Sea D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x^2-y^2=4$, $x^2-y^2=1$. Hallar $\displaystyle\int\int_D xy\,dx\,dy$.

Solución: $\dfrac{15}{8}$.

16. Sea D la región $0\le y\le x,\ 0\le x\le 1$. Evaluar $\displaystyle\int_D (x+y)\,dxdy$ haciendo el cambio $x=u+v,\ y=u-v$. Verificar la respuesta calculando directamente la integral mediante integrales iteradas.

Solución: $\dfrac{1}{2}$.

17. Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (4\ u, 2\ u + 3\ v)$. Sea $D^* = [0,1] \times [1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:

$$\text{(a)} \int_D xy\ dxdy, \quad \text{(b)} \int_D (x-y)\ dxdy,$$

haciendo un cambio para evaluarlas como integrales sobre D^*.

Solución: $D = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 4,\ \dfrac{x}{2} + 3 \le y \le \dfrac{x}{2} + 6\right\}$; (a) 140; (b) -42.

18. Mediante un cambio de variable a coordenadas polares, calcúlense las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int\int_D (1 + x^2 + y^2)^{-3/2}\ dx\ dy$, donde D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

(b) $\displaystyle\int\int_D (x^3+y^3)\ dx\ dy$, siendo $D = \{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + y^2 - 2x \ge 0\}$.

Solución: (a) $\dfrac{\pi}{12}$; (b) $\dfrac{1}{960}\left(203 + 453\sqrt{3} - 280\pi\right)$.

19. Sea D el círculo unidad. Evaluar $\displaystyle\int_D e^{(x^2+y^2)}\ dxdy$ haciendo un cambio de variables a coordenadas polares.

Solución: $\pi(e-1)$.

20. Probar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, haciendo uso de integrales dobles.

Sugerencia: Calcular $\displaystyle\int\int_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$, cuando D es el primer cuadrante.

21. Calcular $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{3/2} dxdy$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \le 4$.

Solución: $\dfrac{64\pi}{5}$.

22. Hallar $\displaystyle\int\int_D (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})\ dx\ dy$, donde D es el recinto acotado por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

Solución: $\dfrac{\pi ab}{2}$.

INTEGRACION EN VARIAS VARIABLES: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DOBLE.

1. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r.

   Solución: πr^2.

2. Hallar el área del recinto encerrado por una elipse de semiejes a y b.

   Solución: πab.

3. Hallar el área comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$, $y = 0$.

   Solución: $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.

4. Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z = 6$. Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.

   Solución: 6.

5. Usar integrales dobles para calcular el volumen de una esfera de radio r.

   Solución: $\frac{4\pi r^3}{3}$.

6. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano OXY, el plano OYZ, el plano OXZ, los planos $x = 1$, $y = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

   Solución: $\frac{2}{3}$.

7. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [1, 2]$ y los lados verticales de R.

   Solución: $\frac{11}{6}$.

8. La temperatura de una placa es proporcional a su distancia al origen. Dicha placa se halla situada en la región $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$. Sabiendo que en el punto $(1, 0)$ su temperatura es de 100°C, hallar la temperatura media de la placa.

   Solución: $\frac{1000}{3}$°C.

9. Determinar el centroide de la región plana limitada por un arco de sinusoide.

   Solución: $C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

10. Una lámina delgada de densidad constante c está limitada por dos circunferencias concéntricas de radios a, b y centro el origen, con $0 < b < a$. Calcular el momento polar de inercia.

    Solución: $\dfrac{\pi}{2}c\left(a^4 - b^4\right)$.