Algunas notas sobre el número e*

1.– Introducción.

El número e ocupa un lugar destacado en la matemática, junto con el número π de Arquímedes, desde la publicación, en 1748, de la obra de Euler (1707-1789) *Introductio in Analysin Infinitorum.*

Con el fin de motivar la introducción de dicho número consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos 1 peseta colocada en un Banco que diera el 100 por 100 de interés. Durante un año se convertiría en $(1+1)^1 = 2$ pesetas. Si se acumulan los intereses cada seis meses, el tanto por uno semestral será $1/2$ y la peseta se convertirá en $(1+1/2)^2$, cantidad que debe ser mayor.

Acumulando los intereses mensualmente, la peseta se convertirá en $(1+1/12)^{12}$. En general, si se divide el año en m partes, la peseta se convertirá en

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

Es interesante averiguar en qué se convertirá la peseta a *interés continuo* en un año; es decir, si se permite la expresión, acumulando los intereses en cada instante. Para ello bastará hallar

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Resulta que, como veremos más adelante, esta sucesión es monótona creciente y está acotada superiormente, luego tiene límite. Este límite es el número irracional

$$2'7182818284\ldots$$

cuya importancia es fundamental en Análisis y en las Ciencias de aplicación. Es la base de los llamados *logaritmos neperianos*, y, a pesar de su complicada definición, introducen gran simplificación en muchas cuestiones.

Este tipo de acumulación, que a primera vista resulta artificioso, se presenta frecuentemente en los fenómenos naturales. Por ejemplo, el crecimiento de las celulas de un ser vivo. Un ser vivo (animal, vegetal) está formado por celulas y su crecimiento consiste en que cada célula da origen a nuevas células, éstas a su vez a otras, etc.

Tal expresión puede aplicarse, dentro de ciertos límites, en particular, al crecimiento de la madera de un bosque, al crecimiento de la población de una comarca, etc. También se aplica a las sustancias formadas en ciertas reacciones químicas.

2.– La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Comenzaremos considerando la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Se probará, primero, que es monótona creciente y, segundo, acotada superiormente. Con esto se concluye que es convergente.

i) Se tiene

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

de donde

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

con lo cual $a_n < a_{n+1}$.

ii) Veamos que está acotada superiormente por 3.

$$a_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots 2}$$

dado que $3\cdot 2 > 2\cdot 2$, $4\cdot 3\cdot 2 > 2\cdot 2\cdot 2$, que, en general, $n! > 2^{n-1}$, sigue que

$$\frac{1}{3\cdot 2} < \frac{1}{2^2}, \qquad \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} < \frac{1}{2^3}, \quad \dots \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

luego

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

De acuerdo con lo probado anteriormente, cuando n tiende a infinito, a_n debe tener un límite, y este límite se denomina el número e.

Para expresar que $e = \lim_{n\to\infty} a_n$, podemos escribir e en forma de serie:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{1}$$

Esta *igualdad,* que incluye una sucesión de puntos suspensivos, es simplemente otro modo de expresar las dos afirmaciones siguientes:

$$a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

y

$$a_n \to e \quad \text{cuando} \quad n\to\infty.$$

La serie (1) permite calcular e con la aproximación que se desee; por ejemplo la suma (con ocho cifras decimales) de los términos de (1) hasta $1/12!$ inclusive es $\sum = 2'71828183\ldots$ Es fácil estimar el error; esto es, la diferencia entre ese valor y el verdadero de e. Para la diferencia $(e-\sum)$ tenemos la expresión

$$\frac{1}{13!}+\frac{1}{14!}+\cdots < \frac{1}{13!}\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{13^2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{13!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{13}} = \frac{1}{12\cdot 12!}.$$

Esta diferencia es tan pequeña que no puede afectar a la octava cifra decimal de $\sum$.

3.– La sucesión $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Aplicando la fórmula del binomio de Newton a b_n se tiene

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(\frac{1}{n}\right)^r$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n\,(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(n-1)}{n}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$

$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.$$

A continuación se probará que:

i) $\{b_n\}$ es monótona creciente y

ii) $\{b_n\}$ es acotada superiormente.

Con esto dicha sucesión sería convergente.

i) Para ver que $b_n < b_{n+1}$ tengamos en cuenta que:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$

$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Por otra parte,

$$b_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}. \tag{3}$$

Ahora, sin más que tener en cuenta que:

$$\frac{k}{n+1} < \frac{k}{n} \Rightarrow -\frac{k}{n+1} > -\frac{k}{n} \Rightarrow 1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

se vé, de este modo, que los términos de (3) son mayores que los de (2) desde el tercero en adelante y que además tiene más términos. Sigue entonces que $b_{n+1} > b_n$.

ii) Para comprobar que la sucesión $\{b_n\}$ está acotada superiormente es suficiente con observar que

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$
$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n < 3.$$

Para finalizar, se demostrará que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = e$.
Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y sea $m > n$. Se tiene que

$$b_m = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\frac{1}{n!} + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!}$$
$$> 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{1}{n!}.$$

Con lo cual

$$\lim_{m\to\infty} b_m$$

$$\geq \lim_{m\to\infty}\left\{1+1+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{1}{n!}\right\}$$

$$=1+1+\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!}+\cdots$$

$$+\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{1}{n!}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=a_n.$$

Luego, tenemos las siguientes desigualdades:

$$b_n \leq a_n \leq \lim_{m\to\infty} b_m$$

de lo que sigue:

$$\lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{m\to\infty} b_m$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e.$$

4.– Aplicación al cálculo de límites de otras sucesiones

Probaremos en este apartado el siguiente resultado:

Toda sucesión $\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n}$ *donde* $\lambda_n \to \infty$*, cualquiera que sea su signo, tiene por límite* e *para* $n \to \infty$*. Es decir,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n}=e, \qquad si \quad \lambda_n\to\infty. \tag{4}$$

En efecto, si $\lambda_n \to \infty$, y es α_n la parte entera de λ_n se verifica

$$\alpha_n \leq \lambda_n \leq \alpha_n + 1$$

y, por consiguiente

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n+1}\right)^{\alpha_n} < \left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} < \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n+1} \qquad (5)$$

al tender n a ∞, también $\alpha_n \to \infty$; y como las sucesiones

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}};$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

tienen por límite e, también estas dos sucesiones (5) que contienen a la dada, tienen el mismo límite e y se verifica (4).

Si $\lambda_n \to -\infty$, llamando $\mu_n = -\lambda_n$, resulta:

$$\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} = \left(1-\frac{1}{\mu_n}\right)^{-\mu_n} = \left(\frac{\mu_n}{\mu_n-1}\right)^{\mu_n} = \left(1+\frac{1}{\mu_n-1}\right)^{\mu_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\mu_n-1}\right)$$

y como $\mu_n \to +\infty$, el límite también es e.

Por tanto, la igualdad (4) subsiste para $\lambda_n \to \infty$ cualquiera que sea su signo.

Referencias

[1] Courant, R. & Robbins, H. *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid, 1967.

[2] Rey Pastor, J. *Análisis Matemático,* Tomo I. Editorial Kapelusz, Buenos Aires 1969.

[3] Ríos, S. *Cálculo Infinitesimal,* Paraninfo, Madrid, 1972.