Espacios Topológicos y Métricos[1]

Introducción.

Este tema nos dará las herramientas necesarias para el desarrollo de los restantes. En él se da la noción rigurosa de convergencia o lo que es lo mismo permite formalizar la idea de límite. De esto trata la parte de la topología que aquí estudiamos y de la que intentaremos dar una idea.

La topología es una rama de las matemáticas cuyo desarrollo ha tenido lugar casi totalmente en el siglo XX. Además de poseer unos objetos de estudio propios, la topología es hoy un auxiliar indispensable en casi cualquier rama de las mátemáticas; el estudio de las propiedades topológicas del espacio euclídeo y la consideración de diversos espacios de funciones hacen que la topología esté presente en todos los capítulos del análisis matemático. La topología se subdivide, a su vez, en otras ramas: la topología conjuntista, la topología algebraica, la topología diferencial...

Si se considera aisladamente, la topología presenta una cierta semejanza con la geometría. Su objeto es el estudio de propiedades y caracteres de conjuntos o espacios que resultan invariantes por deformaciones continuas.

En este tema haremos uso de la topología conjuntista, fundamentalmente en aquellos aspectos que se aplican al conjunto de los números reales.

Algunas nociones preliminares

Cotas y extremos.

En esta sección veremos una de las propiedades más importantes de los números reales y que marca la gran diferencia con los números racionales.

- Un conjunto A de números reales se dice que está *acotado superiormente* si existe un número a tal que
$$a \geq x, \quad \forall x \in A.$$
El número a recibe el nombre de *cota superior* de A.

- Se dice que un número a es *extremo superior* o *supremo* del conjunto A si

  1. a es cota superior de A,
  2. si b es una cota superior de A, entonces $a \leq b$

[1]©Benito González. 2002

Como notación, se escribe $a = \sup A$.

En el caso de que el extremo superior pertenezca al conjunto A se denomina máximo de A y se denota por $\max A$. En otro caso se dirá que A no posee máximo.

- Análogamente, un conjunto A está *acotado inferiormente* si existe un número a tal que
$$a \leq x, \quad \forall x \in A.$$
El número a se denomina *cota inferior* de A.

- Se dice que un número a es *extremo inferior* o *ínfimo* del conjunto A si

  1. a es cota inferior de A,
  2. si b es una cota inferior de A, entonces $a \geq b$

  Como notación, se escribe $a = \inf A$.

  Cuando el extremo inferior es un elemento del conjunto A se dice que este es el mínimo de A y se denota por $\min A$. En caso contrario se dirá que el conjunto A no tiene mínimo.

- Si el conjunto A está acotado superior e inferiormente se dice que está *acotado*.

Ejemplo
Si $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, está claro que A está acotado inferiormente por -1, por ejemplo, y superiormente por 4. No resulta complicado comprobar que $\sup A = 1$ y que $\inf A = 0$.
Con esto podemos enunciar una de las características fundamentales de $\mathbb{R}$:

Axioma del supremo
Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene extremo superior.

Intervalos.
Un *intervalo* en $\mathbb{R}$ es un conjunto I que verifica la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in I \quad \text{con} \quad x < y \quad \text{si} \quad x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Nótese que esta definición incluye todos los intervalos: (a, b), $[a, b)$, $(-\infty, a]$, etc.

Valor absoluto. Distancia.

Valor absoluto
El concepto de valor absoluto en $\mathbb{R}$ es fundamental a lo largo de todo este tema y, en general, a lo largo de toda la asignatura. De este modo, si $x \in \mathbb{R}$, se define su *valor absoluto* como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Esta definición coincide con la idea elemental que se tiene de valor absoluto: $|-8| = 8$ y $|5| = 5$.

A partir de esta definición siguen las propiedades que se recogen en la siguiente

Proposición 1 *Si $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:*

1. $|x| = \max\{x, -x\}$
2. $|x| \geq 0$
3. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
4. $|xy| = |x||y|$
5. *Si $r > 0$ se tiene:* $|x| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq x \leq r$
6. $-|x| \leq x \leq |x|$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Desigualdad triangular)*
8. $|x - y| \geq |x| - |y|$
9. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

La demostración de muchas de ellas es muy sencilla. Veamos algunos casos. Que $|xy| = |x||y|$ se prueba considerando las cuatro posibilidades $x > 0$, $y > 0$; $x > 0$, $y < 0$; $x < 0$, $y > 0$ y $x < 0$, $y < 0$. En todos los casos, ambos miembros son iguales. Si $x = 0$ ó $y = 0$, la igualdad es evidente.

Si $r > 0$ y $|x| \leq r$, entonces, por la definición de valor absoluto, se tiene que $x \leq r$ y $-x \leq r$ y de esta última relación sigue que $-r \leq x$. Por consiguiente, $-r \leq x \leq r$. Por otra parte, si se verifica $-r \leq x \leq r$, está claro que $x \leq r$ y que $-x \leq r$, de lo que sigue que $|x| \leq r$, por definición.

La prueba de la desigualdad triangular se basa en el hecho de que $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente, $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ordenadamente las cadenas de desigualdades sigue que $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$, es decir $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ y de aquí tenemos, por la propiedad probada anteriormente, lo que se quería demostrar.

Finalmente, la prueba de que $|x - y| \geq |x| - |y|$ sigue del hecho de que $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, con lo cual el resultado sigue inmediatamente.

Distancia

La distancia entre dos números reales se define como

$$d(x, y) = |x - y|$$

lo cual concuerda con la idea ordinaria que se tiene de distancia entre dos puntos de una recta: la longitud del segmento que éstos determinan.

De esta definición resulta la siguiente

Proposición 2 *Si $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:*

1. $d(x,y) \geq 0$.
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x,y) = d(y,x)$.
4. *Si* $z \in \mathbb{R}$ *se tiene* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.
5. *Si* $\varepsilon > 0$ *entonces* $d(x,y) < \varepsilon \Leftrightarrow y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$.

La **bola abierta** de centro $x \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ se define como el conjunto

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} : \quad d(x,y) < r\} = (x - r, x + r)$$

es decir, es el intervalo abierto de centro x y longitud $2r$.

Topología

Una topología T sobre un conjunto no vacío X es una colección de subconjuntos de X que reciben el nombre de *abiertos* y que verifican las tres propiedades siguientes: a) $\emptyset$ y X son abiertos; b) la unión de cualquier colección arbitraria de abiertos es también un abierto; c) la intersección de cualquier colección finita de abiertos es también un conjunto abierto. Si X es un conjunto sobre el que está definida una topología T, se dice que el par (X, T) es un espacio topológico.

Nos ocuparemos en este tema, fundamentalmente, de lo que se conoce como topología usual de $\mathbb{R}$.

Más concretamente:

Sea $X \neq \emptyset$ y sea T un subconjunto de partes de X. Se dice que T es una *topología* sobre X si se verifican las siguientes condiciones:

1. $\emptyset, X \in \mathsf{T}$.
2. Si $J \neq \emptyset$, $\forall i \in J$ se tiene $A_i \in \mathsf{T}$ entonces $\bigcup_{i \in J} A_i \in \mathsf{T}$.
3. Si $A, B \in \mathsf{T}$ entonces $A \cap B \in \mathsf{T}$.

Ejemplos.

1. *Topología discreta.* Si X es un conjunto no vacío, la topología discreta es la formada por todos los subconjuntos de X.

2. *Topología indiscreta.* Si $X \neq \emptyset$ y $\mathsf{T} = \{\emptyset, X\}$ se tiene la denominada topología indiscreta.

3. Si $X = \{a, b, c, d\}$ y $\mathsf{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{a, d\}\}$ se tiene que (X, T) es un ejemplo más de un espacio topológico.

4. *La topología usual de* $\mathbb{R}$. Si en $\mathbb{R}$ tomamos la familia

$$\mathsf{T} = \{A \subset \mathbb{R} : \quad \forall x \in A, \quad \exists r > 0 \text{ con } B(x,r) \subset A\}$$

no es difícil comprobar que es una topología sobre $\mathbb{R}$.

En efecto, que $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son elementos de T es evidente. En segundo lugar, si $\{A_i\}_{i\in J} \subset \mathsf{T}$ y $x \in \bigcup_{i\in J} A_i$ entonces $\exists j \in J$ con $x \in A_j$ con lo cual, para cierto $r > 0$ se tendrá que $B(x,r) \subset A_j \subset \bigcup_{i\in J} A_i$ y de este modo, $\bigcup_{i\in J} A_i \in \mathsf{T}$. Finalmente, si $A, B \in \mathsf{T}$ y $x \in A \cap B$ entonces $\exists r_1 > 0$ y $\exists r_2 > 0$ tales que $B(x,r_1) \subset A$ y también $B(x,r_2) \subset B$. Tomando $r = \min\{r_1, r_2\}$ sigue inmediatamente que $B(x,r) \subset A \cap B$.

La topología usual de $\mathbb{R}$ va a ser la base de toda la asignatura, ya que los conceptos de límite, convergencia, proximidad, etc. se apoyan en esta topología.

Es interesenta hacer notar que si bien la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, no ocurre así con la intersección: observemos el caso, en la topología usual de $\mathbb{R}$ de la familia de conjuntos

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

No es difícil comprobar que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

que no es un abierto.

Otro ejemplo de topología es la que se conoce como *topología inducida*. Si (X, T) es un espacio topológico y $A \subset X$, la topología inducida por T sobre A se define como

$$\mathsf{T}_A = \{A \cap U : \quad U \in \mathsf{T}\}$$

no requiere ninguna complicación comprobar que el par (A, T_A) es un espacio topológico.

Entornos.

Si (X, T) es un espacio topológico, $x \in X$ y $U \subset X$, se dice que U es un entorno de x si $\exists A \in \mathsf{T}$ tal que

$$x \in A \subset U.$$

Ejemplos.

En $\mathbb{R}$ con la topología usual:

1. $B(0,1)$ es un entorno de 0. También es un entorno del punto $\frac{1}{2}$.
2. El intervalo $[-2, 0)$ es un entorno de -1

Obsérvese que en $\mathbb{R}$ con la topología usual, cualquier entorno de un punto x contiene necesariamente una bola de centro x.

Puntos interior, exterior y frontera.

Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$, se dice que

1. x es un *punto interior* de A si existe un entorno de x contenido en A. El conjunto de todos los puntos interiores de A se denomina *interior* de A y se denota por $\mathsf{Int}(A)$ o también $\overset{\circ}{A}$.

2. x es un *punto exterior* de A si existe un entorno de x contenido en A^c. El conjunto de todos los puntos exteriores de A se denomina el *exterior* de A y se denota por $\mathsf{Ext}(A)$.

3. x es un *punto frontera* de A si para cualquier U entorno de x se tiene $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos frontera de A recibe el nombre de *frontera* de A y se denota por $\mathsf{Fr}(A)$.

En relación con estas definiciones resultan las siguientes propiedades:

Proposición 3 *Si (X, T) es un espacio topológico y $A \subset X$ se tiene:*

1. $\mathit{Int}(A) \subset A$

2. $\mathit{Int}(A^c) = \mathit{Ext}(A)$

3. $\mathit{Ext}(A) \subset A^c$

4. $\mathit{Fr}(A) \cap \mathit{Int}(A) = \emptyset \quad y \quad \mathit{Fr}(A) \cap \mathit{Ext}(A) = \emptyset$

5. $\mathit{Fr}(A) \cup \mathit{Int}(A) \cup \mathit{Ext}(A) = X$

6. $\mathit{Int}(A)$ *es un conjunto abierto.*

7. *A es abierto* $\Longleftrightarrow \mathit{Int}(A) = A$.

En relación con estas definiciones estudiemos los siguientes ejemplos:

1. Sea $A = (0,1) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Se tiene que $\mathsf{Int}(A) = \emptyset$ ya que no existe ningún intervalo contenido en A. $\mathsf{Ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Por último $\mathsf{Fr}(A) = A \cup \{0, 1\}$.

2. Si $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ entonces:

- $\mathsf{Int}(A) = \emptyset$
- $\mathsf{Fr}(A) = A \cup \{0\}$
- $\mathsf{Ext}(A) = \mathbb{R}\backslash\,(A \cup \{0\})$.

Puntos adherente (clausura), aislado y de acumulación.

Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$, se dice que

1. x es un *punto adherente* o *punto clausura* del conjunto A si para cualquier U entorno de x se verifica que $U \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos clausura de A se denomina *clausura* o *adherencia* de A y se denota por $\mathsf{Cl}(A)$ o también $\bar{A}$.

2. x es un *punto aislado* de A si existe un entorno U de x tal que $U \cap A = \{x\}$. Al conjunto de los puntos aislados de A se denomina *aislado* de A y se denota por $\mathsf{Ais}(A)$.

3. x es un *punto de acumulación* de A si para cualquier U entorno de x se verifica que $(U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de puntos de acumulación de A se denomina *derivado* de A y se denota por $\mathsf{Der}(A)$ o también A'.

La siguiente propiedad es de mucha utilidad en ejercicios:

Proposición 4 *Si (X, T) es un espacio topológico y $A \subset X$ se tiene:*

$$\mathsf{Cl}(A) = \mathsf{Int}(A) \cup \mathsf{Fr}(A).$$

En relación con estas definiciones estudiemos los siguientes ejemplos:
1. Sea $A = (0,1) \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Se tiene que

- $\bar{A} = [0,1]$.
- $\mathsf{Ais}(A) = \emptyset$
- $A' = [0,1]$

2. Si $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ entonces:

- $\mathsf{Cl}(A) = A \cup \{0\}$
- $\mathsf{Ais}(A) = A$
- $A' = \{0\}$.

Conjuntos cerrados.

En un espacio topológico (X, T) se dice que un conjunto $F \subset X$ es *cerrado* si su complementario F^c es abierto.

A la vista de esta definición y de la de espacio topológico se deduce inmediatamente la siguiente

Proposición 5 *Si (X, T) es un espacio topológico se verifica que*

1. *$\emptyset$ y X son conjuntos cerrados.*
2. *La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
3. *La intersección de una colección cualquiera de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Veamos algunas situaciones interesantes:

(a) La unión arbitraria de conjuntos cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado. Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $F_n = \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, que claramente es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Sin embargo,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = (-\infty, 0)$$

que es abierto y no cerrado.

(b) En $\mathbb{R}$ con la topología usual, cualquier subconjunto finito es cerrado.

En efecto, sea $A = \{x_1, x_2, \ldots x_p\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}$ de modo que se verifique

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_p$$

entonces

$$A^c = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \cdots \cup (x_p, \infty)$$

el cual es abierto.

Espacios topológicos conexos.

Un espacio topológico (X, T) se dice que es *conexo* si los únicos conjuntos que son simultaneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.

Existe una caracterización más útil a la hora de hacer ejercicios o realizar demostraciones que se recoge en la siguiente

Proposición 6 *Un espacio topológico (X, T) es conexo si, y sólo si*

$$\forall U, V \in \mathsf{T}, \quad con \quad U \cup V = X \quad y \quad U \cap V = \emptyset \Longrightarrow U = \emptyset \quad ó \quad V = \emptyset$$

En un espacio topológico (X, T), un subconjunto A de X se dice que es conexo si se verifica que

$$\forall U, V \in \mathsf{T}, \quad \text{con} \quad A \subset U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V \cap A = \emptyset \Longrightarrow U = \emptyset \quad \text{ó} \quad V = \emptyset.$$

Concretamente, para la topología usual de $\mathbb{R}$ se tiene que los únicos conjuntos conexos son los intervalos.

Espacios topológicos compactos

Si X es un conjunto no vacío y $\{A_j\}_{j\in J}$ es una colección de subconjuntos de X, se dirá que esta familia es un *recubrimiento* de $A \subseteq X$ si

$$A \subset \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Un *subrecubrimiento* un una parte de un recubrimiento.

Un *recubrimiento abierto* es un recubrimiento formado por conjuntos abiertos.

Un espacio topológico (X, T) se dice que es *compacto* si de todo recubrimiento abierto de X se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Análogamente, en un espacio topológico (X, T), un subconjunto $A \subset X$ es compacto si de todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Está claro que estas definiciones son poco manejables en la práctica. Sin embargo, en $\mathbb{R}$ con la topología usual se tiene:

Proposición 7 *$[a, b]$ es compacto.*

Teorema 1 (Heine-Borel-Lebesgue) *En $\mathbb{R}$ con la topología usual y siendo $M \subset \mathbb{R}$, se verifica*

$$M \quad \textit{compacto} \quad \Longleftrightarrow M \quad \textit{cerrado y acotado.}$$

Espacios métricos.

Los conceptos y demostraciones que se estudiarán en adelante dependen sólo de algunas propiedades de la distancia entre puntos. Cuando estas propiedades se estudian en abstracto conducen a la noción de espacio métrico.

Si X es un conjunto no vacío y d una aplicación

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que $\forall x, y, z \in X$ verifica:

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) \geq 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

entonces se dice que d es una *métrica* o una *distancia* sobre X y el par (X, d) recibe el nombre de *espacio métrico.*

Ejemplos

(a) En $\mathbb{R}$ si definimos $d(x,y) = |x-y|$, no resulta complicado comprobar que d es una distancia (concretamente coincide con la distancia que se definió tras el valor absoluto).

(b) En el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ si definimos $d(z,w) = |z-w|$, donde aquí $|z|$ denota el módulo de z, tenemos otro ejemplo de una distancia.

(c) Si X es un conjunto cualquiera, no vacío, y definimos $d(x,y) = 0$ si $x = y$ y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ se comprueba fácilmente que d define una distancia sobre X (la distancia trivial).

En un espacio métrico (X,d) se denomina *bola abierta* de centro x y radio r al conjunto

$$B(x,r) = \{y \in X : \quad d(x,y) < r\}$$

De forma análoga se define la *bola cerrada* de centro x y radio r al conjunto

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in X : \quad d(x,y) \leq r\}$$

Todo espacio métrico puede ser dotado de una topología que se denomina topología asociada por la métrica o topología generada por la métrica. Sin embargo, no todo espacio topológico procede de un espacio métrico. El siguiente teorema nos caracteriza la topología que genera una distancia:

Teorema 2 *Sea (X,d) un espacio métrico. Si definimos*

$$\mathcal{T}_d = \{A \subset X : \quad \forall a \in A, \quad \exists r > 0, \quad \textit{tal que} \quad B(a,r) \subset A\}$$

entonces el par $(X, \mathcal{T}_d)$ es un espacio topológico, siendo $\mathcal{T}_d$ la topología asociada a la métrica d.

Su demostración es la misma que se hizo para comprobar que la topología usual de $\mathbb{R}$ es realmente una topología.

Un espacio topológico (X, T) se dice que es *metrizable* si su topología está asociada a alguna distancia definida sobre X.

Para finalizar daremos algunas definiciones interesantes relativas a espacios métricos:

Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. La distancia del punto x al conjunto A se define como

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) : \quad y \in A\}.$$

Nótese que este número siempre existe ya que es el ínfimo de un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente.

Si A y B son subconjuntos de X se define la distancia de A a B como

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : \quad x \in A, \quad y \in B\}.$$

Si se denomina *diámetro* del conjunto $A \subset X$ a

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) : \quad x,y \in A\}$$

Se dirá que el conjunto A está *acotado* si $\delta(A) < \infty$.