

**MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS**  
**CURSO 2002-2003**

PROBLEMAS TEMA 6

1. Usar el teorema de Gerschgorin para determinar la localización aproximada de los autovalores de

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Los valores  $\tilde{\lambda} = 0.999$  y  $\tilde{x} = (0.998, 1.01)^T$  son, respectivamente, valor y vector propio aproximados de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obtener una cota del error para  $\tilde{\lambda}$ .

3. Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz diagonal y  $\tilde{A} = A + E$  una perturbación de  $A$  con  $e_{ii} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Denotando por  $\lambda_i(A)$  los autovalores de la matriz  $A$ , demostrar que

$$|\lambda_i(\tilde{A}) - \lambda_i(A)| \leq \sum_{j=1}^n |e_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

4. Comprobar la validez de la estimación del ejercicio con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\epsilon$  es un número real no negativo.

5. Comprobar que determinar los ceros de un polinomio con coeficientes reales de grado  $n$ ,  $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , ( $a_n \neq 0$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, \dots, n$ ), es equivalente a determinar el espectro de la *matriz acompañante*  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\begin{pmatrix} -(a_{n-1}/a_n) & -(a_{n-2}/a_n) & \cdots & -(a_1/a_n) & -(a_0/a_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una consecuencia importante de este resultado es que debido al teorema de Abel (en general, para un polinomio de grado  $> 4$  no existen fórmulas explícitas para sus raíces), no existen en general métodos directos para computar los autovalores de una matriz de orden  $\geq 5$ .

6. Aplicar el teorema de Gerschgorin al problema anterior para obtener las siguientes cotas para los ceros  $r$  del polinomio  $p_n(x)$ :  $|r| \leq 1$ , o  $|ra_n + a_{n-1}| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-2}|$ . Si estas cotas dan lugar a regiones disjuntas del plano complejo, ¿qué se puede decir del número de ceros dentro de cada región?