

**MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS**  
**CURSO 2002-2003**

PROBLEMAS TEMA 4

1. Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ , real y no singular. Sea  $\|\cdot\|_v$  una norma vectorial en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos  $\|x\|_* = \|Ax\|_v$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Probar que  $\|\cdot\|_*$  es una norma vectorial de  $\mathbb{R}^n$ .

2. Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$ . Probar que la norma de Fröbenius

$$F(A) = \|A\|_F = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

es una norma matricial compatible con la norma euclídea.

3. Probar que la norma matricial inducida por la norma vectorial  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  viene dada por

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

4. Sea  $\|\cdot\|_m$  una norma matricial en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , el espacio de matrices reales de orden  $n \times n$ . Considerar el vector  $v = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ . Probar que  $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\|x\|_v = \|xv^T\|_m$  es una norma vectorial en  $\mathbb{R}^n$  compatible con la matricial dada. ¿Cuáles serían las normas vectoriales correspondientes a las normas matriciales  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$ ? Probar que existen infinitas normas vectoriales compatibles con  $\|\cdot\|_m$ .

5. Probar, para  $x \in \mathbb{R}^n$

(a)  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$

(b)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

(c)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

6. Probar, para  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a)  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$

(b)  $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|$

(c)  $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$

(d)  $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$

(e)  $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

7. Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$ .

(a) Probar que si  $A$  es hermitiana entonces  $\|A\|_2 = \rho(A)$ .

(b) Probar que si  $U$  es unitaria del mismo orden que  $A$  entonces

$$\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2.$$

8. Sea  $\{A^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de matrices cuadradas de orden  $n$ . Se dice que la sucesión tiene por límite  $A$ , matriz cuadrada de orden  $n$ , si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|A^{(i)} - A\| = 0$  para alguna norma matricial.

(a) Probar que la convergencia de una sucesión de matrices es independiente de la norma matricial.

(b) Explicitar la caracterización de la convergencia usando la  $\|\cdot\|_1$ .

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

¿Se cumple que  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = 0$ ?

10. Probar para los números de condición  $K_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a)  $\frac{1}{n} K_2(A) \leq K_1(A) \leq n K_2(A)$

(b)  $\frac{1}{n} K_{\infty}(A) \leq K_2(A) \leq n K_{\infty}(A)$

(c)  $\frac{1}{n^2} K_1(A) \leq K_{\infty}(A) \leq n^2 K_1(A)$

11. Sean las matrices de orden  $n$ ,  $n \geq 3$  y  $a \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & \cdots & a+1 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+1 & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a-1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -a & 0 & \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & & \vdots \\ 1 & -1 & & & & 0 \\ a & 0 & \cdots & & 0 & -(a+1) \end{pmatrix}$$

(a) Demostrar que  $B = A^{-1}$ .

(b) Computar el número de condición  $K_{\infty}(A)$ .

(c) Sean  $Ax = b$  y  $A(x + \delta x) = b + \delta b$  dos sistemas de ecuaciones lineales. Calcular  $x$  y  $\delta b$  de manera que se verifique

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = K_{\infty}(A) \frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}.$$

12. Sea  $\varepsilon > 0$ . Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Si se emplea la norma  $\|\cdot\|_\infty$  y  $\varepsilon = 0.01$ , ¿cuántas veces mayor puede ser la perturbación relativa en la solución de  $Ax = b$  para una perturbación relativa en  $b$ ?

13. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcular los números de condición  $\text{cond}(A)_p$  para  $p = 1, 2, \infty$ .
  - (b) Calcular los autovalores y autovectores de  $A$ . Partiendo de ellos, comprobar que la matriz está mal condicionada.
  - (c) Dar una interpretación geométrica del mal condicionamiento.
14. (a) Probar que si  $A$  es unitaria entonces  $\text{cond}(A)_2 = 1$ .
- (b) Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Probar que  $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$ .