MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CURSO 2002-2003

PROBLEMAS TEMA 2

1. Probar que el número total de operaciones elementales que hay que realizar para resolver el sistema lineal $Ax = b$ por el método de Cramer es $(n+1)!n-1$, siendo A una matriz cuadrada de orden n.

2. Resolver los sistemas siguientes por el método de eliminación de Gauss. Comprobar que $A = LU$, siendo el sistema $Ax = b$:

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix}.$

3. Resolver los sistemas siguientes $Ax = b$ aplicando el método de Gauss con pivotación parcial y total:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}.$

4. Considerar el sistema $Ax = b$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   cuya solución es

$$x = \begin{pmatrix} 26/10 \\ -38/10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ -3{,}8 \\ -5{,}0 \end{pmatrix}.$$

   a) Mostrar que cuando se emplea la eliminación gaussiana y los cálculos se hacen con 4 cifras significativas y redondeo, la solución que se obtiene es $(1{,}335, 0, -5{,}003)^T$.

   b) Mostrar que utilizando la misma precisión pero ahora con pivotación parcial, la solución que se obtiene es $(2{,}602, -3{,}801, -5{,}003)^T$.

5. Probar que toda matriz A cuadrada y estrictamente diagonal dominante es factorizable LU sin usar pivotación.

6. Probar que toda matriz cuadrada A definida positiva (no necesariamente simétrica) es factorizable LU sin necesidad de pivotación.

7. Probar que toda matriz cuadrada A que verifica

$$x^T A x \neq 0, \qquad \forall \|x\|_2 = 1$$

   es factorizable LU sin necesidad de pivotación.

8. Hallar la factorización LU de las siguientes matrices A usando eliminación gaussiana y pivotación por filas. Usar dichas factorizaciones para resolver luego los siguientes sistemas lineales $Ax = b$:

   a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Resolver los sistemas siguientes $Ax = b$ por el método de Gauss con pivotación parcial y escalado de filas:

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

10. Hallar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}$$

   y utilizar esta descomposición para resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$, con $b = (3, 1, -15, -107)^T$.

11. *a*) Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, y sea $\{a_1, \ldots, \tilde{a}_k, \ldots, a_n\}$ otra base que difiere de la anterior en que el vector a_k ha sido reemplazado por el vector $\tilde{a}_k$. ¿Cómo se pueden determinar las coordenadas con respecto a la segunda base de un vector prefijado, si se conocen sus coordenadas respecto a la primera base?

b) Supongamos que se quiere resolver un sistema lineal de ecuaciones, pero después de efectuar la factorización LU, se descubre que una de las columnas de la matriz original A es errónea. ¿Cómo se puede usar la descomposición para computar la solución correcta? Formular el correspondiente algoritmo y utilizarlo para resolver el sistema del problema anterior si la primera columna de A se reemplaza por $(0, 0, 6, 36)^T$.

12. Resolver el sistema $Ax = b$ siguiente por el método de Gauss–Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

13. Calcular aplicando el método de Gauss–Jordan la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. *a*) Probar que el número de operaciones $(\times, \div)$ para resolver un sistema de orden n por el método de Gauss–Jordan es $n^3/2 + n^2 - n/2$.

    b) Dada A matriz no singular de orden $n \times n$, probar que el método de Gauss–Jordan sólo necesita de n registros de almacenamiento adicionales de los n^2 que requiere A, para obtener A^{-1}.

15. Sea A una matriz no singular. Supongamos que A tiene dos descomposiciones de la forma $A = L_1U_1,\ A = L_2U_2$, siendo $L_i,\ i = 1, 2$, triangulares inferiores y $U_i,\ i = 1, 2$, triangulares superiores. Estudiar la relación entre las matrices L_i y U_i.

16. Comprobar que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

no es factorizable en la forma LU. A continuación formar una permutación de sus filas que sí dé lugar a una matriz factorizable.