MÉTODOS NUMÉRICOS II - FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CURSO 2002-2003

PROBLEMAS TEMA 1

1. Dados vectores $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (1, 1, 3)$, obtener un tercer vector u_3 tal que $\{u_1, u_2, u_3\}$ sea una base ortogonal. Normalizar estos vectores para obtener una base ortonormal.

2. Sea $q(x)$ la forma cuadrática asociada a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   a) Demostrar que si A es antisimétrica, entonces $q(x) \equiv 0$.

   b) Si A es una matriz cualquiera y definimos

   $$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad A_1 = \frac{1}{2}(A - A^T),$$

   entonces $A = A_1 + A_2$. Demostrar que A_1 es simétrica y $< Ax, x >=< A_1x, x >$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Esto demuestra que la matriz de coeficientes A de una forma cuadrática puede suponerse siempre simétrica sin pérdida de generalidad.

3. Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

   $$\rho(x) = \inf_{y\in W} \|x - y\|_2.$$

   Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base ortonormal de W. Extendemos esta base a una base ortonormal, $\{u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_n\}$, de $\mathbb{R}^n$.

   a) Demostrar que:

   $$\rho(x) = \left(\sum_{j=m+1}^{n} | < x, u_j > |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

   y que se alcanza de forma única en $y = Px$, donde $P = \sum_{j=1}^{m} u_j\, u_j^T$.

   b) Demostrar que $P^2 = P$.

   c) Demostrar que $P^T = P$.

   d) Demostrar que $< Px, z - Pz >= 0$, $\forall x, z \in \mathbb{R}^n$.

   e) Demostrar que $\|x\|_2^2 = \|Px\|_2^2 + \|x - Px\|_2^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

4. Se dice que A es una matriz *de proyección* si $A^2 = A$. En tal caso, ¿cómo son los autovalores de A?

5. Encontrar los autovalores (o valores propios) y autovectores (o vectores propios) de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Sean A y B matrices semejantes. Probar:
   (a) Los polinomios característicos de A y B coinciden.
   (b) Conocidos los valores y vectores propios de A, calcular los de B.
   (c) Traza(A)=Traza(B), $\det A = \det B$.
7. Probar las siguientes propiedades:
   (a) Traza$(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, siendo $\{\lambda_i\}$ los autovalores de A.
   (b) Sea A invertible. Si λ es un valor propio de A, entonces λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.
   (c) $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.
8. Probar que si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ son autovalores distintos de una matriz A de orden $n \geq m$, y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son sus respectivos autovectores, entonces $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son linealmente independientes.
9. Sea $y \in I\!R^n - \{0\}$. Considerar la matriz de orden $n \times n$, $A = yy^T$. Probar que $\lambda = 0$ es un valor propio de A de multiplicidad exactamente $n-1$. ¿Cuál es el otro valor propio de A?
10. Sea A una matriz hermitiana de orden $n \times n$. Probar que A es definida positiva si y sólo si todos los valores propios son reales y positivos.
11. Sea $U \in \mathbb{C}^n$.
    a) Demostrar que $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.
    b) Si U es ortogonal, probar que $< Ux, Uy >=< x, y >$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.
    c) Demostrar que todos los autovalores de una matriz unitaria están sobre la circunferencia unidad.
12. Hacer la descomposición de Schur para la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
13. Obtener la descomposición de Jordan para la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
14. Dado un vector $w \in I\!R^n$, tal que $w^T w = 1$, definimos la matriz $A = I - 2ww^T$. Probar que A es simétrica y unitaria.