Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 1. Conceptos del Análisis Numérico

HOJA 1

1. Velocidad de convergencia. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

si tratamos de obtener una aproximación del número e podríamos usar la sucesión $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ como aproximación. Calcular x_1, x_{10}, x_{30}, x_{50}, x_{1000} y estimar el error cometido en cada caso.

2. Demostar que el siguiente algoritmo

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 \\ x_{n+1} & = & \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

proporciona una sucesión $\{x_n\}$ que converge a $\sqrt{2}$. Calcula $x_1\, x_2\, x_3$ y x_4, estima el error que se comete en cada caso. ¿ Es más rápido este algoritmo que el del ejercicio anterior ?.

3. Inestabilidad numérica ocasionada por Errores de Redondeo. Pruébese que la sucesión

$$y_n = e^{-1}\int_0^1 x^n\, e^x dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

verifica la siguiente ecuación en recurrencia

$$y_{n+1} + (n+1)y_n = 1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad\qquad *$$

con dato inicial $y_0 = \frac{1}{e}(e-1)$.

(a) Probar que la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es positiva, monótona decreciente y que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

(b) Usando la fórmula anterior, computar los números $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{10}$. Interpretar los resultados apartir de las conclusiones del apartado anterior. Justificar los resultados.

(c) Como consecuencia de los resultados del primer apartado parece natural suponer que para algún $n \quad y_n \equiv 0$ y utilizar la fórmula (*) para obtener de forma recursiva hacia atrás una estimación de y_0. Efectuese para $n = 5,\ 10$ dicha suposición. Justificar los resultados.

Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 1. Conceptos del Análisis Numérico

HOJA 2

4. Obtener un algoritmo para calcular las integrales

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+1}\,dx$$

¿ Es estable ?. Modifíquese la integral para obtener algoritmos con diversos tipos de estabilidad.

5. ERROR DE TRUNCAMIENTO. Calcular los valores de la función $y = f(x)$ en los puntos $x_j = j \cdot h$, siendo $h = \dfrac{1}{n}$; $\quad j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n$ siendo $f(x)$ la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y^2 + 1 \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

con $y(0) = 0$.

Indicación: Aproximar $f'(a)$ por $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Compruébese que $y(x) = tag(x)$ es la solución exacta de dicha ecuación. Hallese la diferencia entre los valores exactos y la sucesión computada en los puntos x_j ; $j = 1,\ 2, \ldots,\ n$ cuando la $n = 4$ y para $n = 8$, contrastar los resultados para cada valor de n.

Nota : ESTE MÉTODO RECIBE EL NOMBRE DE MÉTODO DE EULER

6. Integrar numéricamente la ecuación diferencial

$$y' = y$$

con valor inicial y(0) = 1, en el intervalo $[0, 0.4]$. Usando el método de Euler.

   (a) Con paso de longitud $h = 0.2$.

   (b) Con $h = 0.1$. En ambos caso estimar los errores cometidos sabiendo que la solución exacta es e^x. Contrastar los resultados obtenidos en cada caso.

7. Sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente y es igual a $ln(2)$, es decir, Si definimos $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ a la suma parcial de dicha serie, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = ln(2)$

Estimar el error de truncamiento al considerrar S_{10} como aproximación de $ln(2)$.

8. Hallar una estimación de $sen(20^o 30')$ con un error menor de 10^{-5}.