

Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 4. Análisis de los métodos más usuales

HOJA 1

1. En el año 1225 Leonardo de Pisa estudió la ecuación

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

y obtuvo a $x = 1,368808107$ como raíz. Nadie sabe qué método utilizó para obtener este valor; pero es un resultado notable para su época.

- (a) Aplíquese el método iterativo del punto fijo para obtener este resultado.
- (b) Aplíquese el método de bisección.
- (c) Aplíquese el método de Newton-Raphson.

Comparar los resultados obtenidos.

2. Demuéstrese que la fórmula para determinar raíces cuadradas

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{Q}{x_n} \right)$$

es un caso especial de la iteración de Newton-Raphson.

3. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxímense, con un error menor que 10^{-4} , las raíces de las siguientes ecuaciones en los intervalos dados:

a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $I_1 = [1; 4]$. b) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $I_2 = [-4; 0]$.

c) $x - \cos x = 0$, $I_3 = [0; \frac{\pi}{2}]$. d) $x - 0,8 - 0,2 \sin x = 0$, $I_4 = [0; \frac{\pi}{2}]$.

4. Repítase el ejercicio anterior utilizando el método de la secante.
5. Utilice el método de Newton-Raphson para aproximar, con 10^{-4} de precisión, el valor de x que produce el punto de la gráfica de $y = x^2$ más próximo a $P_o(1; 0)$.
6. Utilice el método de Newton-Raphson para aproximar, con una exactitud de 10^{-4} , el valor de x que produce el punto de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ más cercano a $P_1(2; 1)$.

Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 4. Análisis de los métodos más usuales

HOJA 2

7. Encuéntrese una aproximación de la raíz de $x^3 - x - 1 = 0$ en $J = [1; 2]$, con una precisión de 10^{-5} .

- (a) Utilizando el método de bisección.
- (b) Utilizando el método de la secante.
- (c) Utilizando el método de Newton-Raphson.

Compárese los resultados obtenidos en a), b) y c).

8. Con $x_0 = 2$, calcule una aproximación de $\sqrt[3]{3}$.

- (a) Utilizando el método de Newton-Raphson.
- (b) Utilizando el método de la secante.

Con una precisión de 10^{-4} . Compare los resultados obtenidos.

9. Discutir el método de Newton-Raphson para la determinación de la raíz de la ecuación $3x^3 - 3x + 2\alpha = 0$, entre -1 y $-1 - \frac{\alpha}{3}$, donde $1 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{5}{3}}$.

10. Supongamos que existe una raíz simple s de $f(x) = 0$, en un intervalo I y además, que:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(y)}{f'(x)} \right| \leq m, \quad \forall x, y \in I \quad (f \in C^2(I)).$$

Se intenta calcular un valor que aproxime a s por el método de Newton-Raphson,

- (a) Utilice el desarrollo de Taylor de f en un entorno de s para acotar

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - s|$$

en función de e_0, m y n .

- (b) Exprese una condición para e_0 de modo que si se cumple, entonces el método es convergente.

Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 4. Análisis de los métodos más usuales

HOJA 3

11. Si se aplica el método de Newton a un polinomio

$$p(x) = a_0 x^m + \dots + a_m,$$

con un cero α de multiplicidad m .

- (a) Mostrar la relación entre $e_{n+1} := x_{n+1} - \alpha$ y $e_n := x_n - \alpha$, para comprobar que la convergencia en este caso es lineal.
- (b) Demostrar que, en este caso particular, si se aplica el método de Newton “modificado” (para el caso en que se tienen raíces de multiplicidad m), es decir, usando la sucesión:

$$x_{n+1} := x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

entonces la raíz se obtiene en un sólo paso.

- (c) Probar que, a pesar de la modificación realizada, la convergencia del método sigue siendo cuadrática.

12. ¿Cómo debe elegirse la función h en la fórmula

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + h(x) \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)^2,$$

para que la iteración definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ converja a una raíz de $f(x) = 0$ con orden cúbico?

13. Existe una modificación del método de Newton que evita la evaluación de la función derivada y que se conoce como **Método de Steffenson**. Este método consiste en la utilización de la sucesión

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{D(x_n)}, \quad \text{con} \quad D(x_n) := \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

donde $f \in C'(A)$, siendo $A \subset \mathbb{R}$ tal que existe un único $\beta \in A$ que es raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Asumiendo que $f'(\beta) \neq 0$, demostrar que este es un método iterativo de segundo orden (convergencia cuadrática).