

# Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

## Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 1

1. Determinase que la función  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$  tiene una única raíz  $\alpha$  en  $I = [1; 2]$ . Estime teóricamente cuántas iteraciones serán necesarias utilizando el método de bisección, para hallar un valor aproximado de  $\alpha$  con una precisión de  $10^{-4}$ . Determine numéricamente este valor (una aproximación de  $\alpha$  con un error menor que  $10^{-4}$ ).
2. Encuentrese, utilizando el método de bisección, una aproximación de  $\sqrt[3]{25}$  con una precisión de  $10^{-4}$ .
3. Demostrar que cada una de las funciones siguientes tiene un punto fijo en  $x$ , precisamente cuando  $f(x) = 0$  para  $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ .

$$(a) g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4} \qquad (c) g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2}$$

$$(b) g_2(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2} \qquad (d) g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$$

En cada una de las funciones dadas, si es posible, efectuar 4 iteraciones tomando  $p_0 = 1$  y  $p_{n+1} = g(p_n)$  para  $n = 0, 1, 2$  y  $3$ .

¿Cuál de estas funciones dá la mejor aproximación a la solución?

4. Dar ejemplos de funciones que **no** tienen punto fijo aunque poseen las siguientes características:
  - (a)  $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$
  - (b)  $f : ]0; 1[ \longrightarrow ]0; 1[$  y es continua.
  - (c)  $f : A \longrightarrow A$  y es continua, con  $A = [0; 1] \cup [2; 3]$
  - (d)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  y es continua.
5. Se define la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  del modo siguiente:

$$x_{n+1} = x_n(2 - a \cdot x_n) \ ; \ x_0 > 0 \ a > 0.$$

- (a) Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite.
- (b) Comprobar que se satisface la siguiente igualdad:  $Rel(x_{n+1}) = [Rel(x_n)]^2$ .

# Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

## Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 2

6. Se quiere resolver la ecuación  $x + \ln(x) = 0$ , cuya raíz es  $\alpha \approx 0.5$ , mediante iteraciones y se quiere escoger de entre los siguientes esquemas iterativos:

$$(I) \ x_{n+1} = -\ln(x_n) \quad (II) \ x_{n+1} = e^{-x_n} \quad (III) \ x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$$

- (a) ¿Cuál de las fórmulas se puede usar ?.
- (b) ¿Cuál se debería usar ?.
- (c) Dar una fórmula que mejore los resultados anteriores.
7. Demostrar que si  $g(x) = 2^{-x}$ , entonces la ecuación  $g(x) = x$  tiene una única raíz  $s$  en  $[1/3; 1]$ . Usar la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación al punto  $s$  con una precisión de  $10^{-4}$ . Estimar el número de iteraciones requeridas y comparar esta estimación teórica con el número de iteraciones realmente necesario.
8. Demostrar que  $g(x) = \pi + 0,5 \sin x$  tiene un único punto fijo en  $[0; 2\pi]$ . Usar la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación a dicho punto, con una precisión de  $10^{-2}$ .
9. Usando iteración de punto fijo, determinar la raíz de la ecuación  $x^3 - x - 1 = 0$  que pertenece al intervalo  $[1, 2]$ . Obténgase una aproximación a la raíz exacta con un error que no exceda al valor  $10^{-2}$ .
10. Sea  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  derivable tal que  $-1 < g'(x) < 0 \forall x \in [a, b]$ . Si  $x_0 < p$  donde  $g(p) = p$ , demostrar que la sucesión de iterantes satisface:

$$x_0 < x_2 < x_4 < \dots < p < \dots < x_5 < x_3 < x_1$$

11. Usar el procedimiento de iteración de punto fijo para encontrar una aproximación a  $\sqrt{3}$  que sea exacta a  $10^{-4}$ .
12. Si en una calculadora digital se introduce un número cualquiera y después se presiona repetidamente la tecla que corresponde a la función coseno, ¿qué número aparecerá? Justifique teóricamente lo que ocurre.

# Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

## Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 3

13. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determinar un intervalo  $[a; b]$  en el que la iteración de punto fijo converja. Estimar el número de iteraciones que son necesarias para obtener aproximaciones con una precisión de  $10^{-5}$ .

(a)  $x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$

(b)  $x = \sqrt{\frac{1}{3}e^x}$

(c)  $x = 5^{-x}$

(d)  $x = 6^{-x}$

(e)  $x = 1,75 + \frac{4x - 7}{x - 2}$

(f)  $x = \frac{5}{x^2 + 2}$

14. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos determinados por las siguientes funciones, en los intervalos que se indican.

(a)  $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

(b)  $g(x) = \frac{4x - 3}{x}, \quad x \in \mathbb{R}$

(c)  $g(x) = \frac{4x^2 - 4x + 9}{12}, \quad x \in \mathbb{R}$

15. Demostrar que el esquema iterativo  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n^2}$  converge para cualquier valor inicial  $x_0$ . Deducir el orden de convergencia.

16. Dada la ecuación:  $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$  que admite por raíz  $\alpha = 1$ , la escribiremos en la forma:

$$x = \varphi_1(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2}{5}$$

ó

$$x = \varphi_2(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2,$$

encontrar el orden de convergencia de cada uno de los métodos iterativos a que dan lugar.

# Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

## Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 4

17. ¿Cuáles de las siguientes iteraciones convergen al punto  $\alpha$  indicado, suponiendo que las aproximaciones iniciales  $x_0$  están próximas a dicho punto fijo  $\alpha$ ? Determinar el orden de convergencia según el caso.

$$(a) \quad x_{n+1} = -16 + 6x_n + \frac{12}{x_n}, \quad \alpha = 2. \quad (b) \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^2}, \quad \alpha = \sqrt[3]{3}.$$

$$(c) \quad x_{n+1} = \frac{12}{1+x_n}, \quad \alpha = 3.$$

18. Dada  $g(x) = x^2 - 2x + 2$ . ¿ Para qué valores de  $x_0$  converge  $x_{n+1} = g(x_n)$  a una raíz de  $g(x) = x$  ? ¿Cuál es el orden de convergencia?. Hacer un dibujo de la situación.
19. Demostrar que cada una de las siguientes funciones tiene un punto fijo en  $p$  cuando  $f(p) = 0$ , donde  $f(x) = x^2 - a$ .

$$(a) \quad h_1(x) = x^2 + x - a \quad (c) \quad h_3(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$$

$$(b) \quad h_2(x) = \frac{a}{x} \quad (d) \quad h_4(x) = x + c(x^2 - a) \quad \text{.Determinar } c \text{ para que haya}$$

convergencia. ¿Cuál es la mejor ?

20. Estudiar qué valores deben tomar  $a$  y  $b$  en  $g(x) = \frac{x^3 + ax}{bx^2 + 3}$  para que el método  $x_{n+1} = g(x_n)$  proporcione  $\sqrt[3]{3}$ , con convergencia local al menos cuadrática.
21. Determinar  $p$ ,  $q$  y  $r$  de manera que el orden de convergencia del método iterativo:

$$x_{n+1} = px_n + \frac{q \cdot a}{x_n^2} + \frac{r \cdot a^2}{x_n^5}$$

para  $\sqrt[3]{a}$  sea lo más alto posible. Para esta elección de  $p$ ,  $q$ , y  $r$  indicar cómo depende el error en  $x_{n+1}$  con el error en  $x_n$ .

# Métodos Numéricos I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

## Capítulo 3. Ecuaciones no lineales. Iteración funcional

HOJA 5

22. Para las siguientes sucesiones  $\{x_n\}$  linealmente convergentes, usar el método de  $\Delta^2$  de **Aitken** para generar  $\{\hat{x}_n\}$  hasta que  $|\hat{x}_n - x| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ , donde  $x$  es el correspondiente límite. Comparar los resultados con los de la propia sucesión  $\{x_n\}$ .

$$a) x_n = e^{-n} \quad , \quad n \geq 1 \quad b) x_n = \frac{n!}{n^n} \quad , \quad n \geq 1 \quad c) x_n = \frac{1}{n^n} \quad , \quad n \geq 1$$

23. En cada una de las siguientes ecuaciones, utilizando una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  que converja linealmente a la solución  $\alpha$  contenida en el intervalo que en cada caso se indica, determine el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación de  $\alpha$  con una precisión de  $10^{-5}$ . Aplique posteriormente el proceso de extrapolación conocido como  $\Delta^2$  de **Aitken** para “acelerar la convergencia” y destaque su ventaja, indicando la cantidad de iteraciones con las que ahora se logra la misma precisión que se había prefijado ( $\epsilon < 10^{-5}$ ).

$$a) x^3 - x - 1 = 0 \quad \text{en} \quad I = [1; 2] \quad b) x - 2^{-x} = 0 \quad \text{en} \quad I = [0; 1]$$

$$c) e^x = x^2 - 3x + 2 \quad \text{en} \quad I = [0; 1]$$

24. Se dice que un método iterativo  $\{x_n\}$  converge de forma superlineal a  $\alpha$ , si existe una sucesión  $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$  tal que para cada  $n > 0$  se cumple:

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c_n |\alpha - x_n| \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Demostrar que en tal caso se tiene:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_n|}{|x_{n+1} - x_n|} = 1$ ,

lo que significa que, para  $n$  “suficientemente grande”, se puede usar la estimación

$$|\alpha - x_n| \doteq |x_{n+1} - x_n|,$$

para dar “una buena aproximación” de  $\alpha$ .