TEMA IV: FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS

1. La ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{1.1}$$

$x \in \mathbb{R}$ y α, β, γ parámetros reales.

Dividiendo en (1.1) por $x(1-x)$ obtenemos $(x \neq 0,\ x \neq 1)$

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0 \tag{1.2}$$

lo que demuestra que $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares ya que $P(x) = \dfrac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}$ y $Q(x) = -\dfrac{\alpha\beta}{x(1-x)}$ no son funciones analíticas en dichos puntos. Sin embargo:

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xP(x) = \gamma; \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 Q(x) = 0$$

lo que nos indica que $x = 0$ es un punto singular regular, por lo que buscamos soluciones del tipo $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$, siendo r raíz de la ecuación indicial $(r-1)r + p_0 r + q_0 = 0$.

$$r^2 - r + \gamma r = 0 \implies r^2 + (\gamma-1)r = 0 \implies r_1 = 0 \ \ y \ \ r_2 = 1-\gamma$$

La solución que se obtiene para $r = 0$ se conoce como función hipergeométrica y se denota por ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ o simplemente $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$, y viene dada por:

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k} x^k$$

donde hemos introducido los símbolos de Pochhammer

$$(\lambda)_k = \begin{cases} 1, & si\ k = 0 \\ \lambda(\lambda+1)...(\lambda+k-1), & si\ k = 1,2,3,... \end{cases}$$

y exigimos que $\gamma \neq 0, -1, -2, ...$

Dado que

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(k+1)!(\gamma)_{k+1}}x^{k+1}}{\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k}x^k}\right| = |x|\left|\frac{k^2 + (\alpha+\beta)k + \alpha\beta}{k^2 + (\gamma+1)k + \gamma}\right|$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| < 1$$

nos dice que la función hipergeométrica, en realidad la serie que la define, converge en el intervalo $|x| < 1$.

Si hubíesemos optado por $r = 1-\gamma$ y asumido que $\gamma \neq 2, 3, 4, ...$, el resultado hubíese sido

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_k(1-\gamma+\beta)_k}{k!(2-\gamma)_k} x^{k+1-\gamma} = x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta; 2-\gamma; x) \qquad (|x| < 1)$$

función linealmente independiente con ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$. Por lo tanto si $\gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ la solución general de la ecuación (1.1) en las proximidades de $x = 0$ sería:

$$y(x) = C_1\ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) + C_2 x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta; 2-\gamma; x) \qquad (|x| < 1)$$

2. La función hipergeométrica

Hemos visto que la función hipergeométrica viene dada por

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k} x^k \qquad (|x| < 1; \quad \gamma \neq 0, -1, -2, ...)$$

Pasemos a comprobar que también admite una representación integral. Asumamos que $\gamma > \beta > 0$

$$\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} = \frac{\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)}}{\frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)}} = \frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(\beta)}$$

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1+k}(1-t)^{\gamma-\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} B(\beta+k, \gamma-\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+k)} = \frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k}$$

luego

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k \int_0^1 t^{\beta-1+k}(1-t)^{\gamma-\beta-1} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!}(xt)^k\right] dt = \star$$

teniendo en cuenta que

$$\binom{-\alpha}{k} = \frac{-\alpha(-\alpha-1)....(-\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha+1)....(\alpha+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(\alpha)_k}{k!}$$

y

$$(1-xt)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-1)^k (xt)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (xt)^k \qquad (|xt| < 1)$$

podemos concluir

$$\star = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha} dt \qquad (\gamma > \beta > 0, \;\; |x| < 1)$$

3. Propiedades elementales de la función hipergeométrica

En esta sección mostraremos algunas propiedades, de la función hipergeométrica, que son consecuencia inmediata de su definición como suma de una serie de potencias.

1. propiedad de simetría

$$_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \, _2F_1(\beta, \alpha; \gamma; x)$$

2.

$$\frac{d}{dx} \, _2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \, _2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x)$$

3.

$$\frac{d^m}{dx^m} \, _2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} \, _2F_1(\alpha+m, \beta+m; \gamma+m; x) \qquad (m = 1, 2, 3, ...)$$

Para simplificar la escritura, usaremos la notación

$$_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) \equiv F \qquad\qquad _2F_1(\alpha \pm 1, \beta; \gamma; x) \equiv F(\alpha \pm 1)$$

$$_2F_1(\alpha, \beta \pm 1; \gamma; x) \equiv F(\beta \pm 1) \qquad\qquad _2F_1(\alpha, \beta; \gamma \pm 1; x) \equiv F(\gamma \pm 1)$$

4.

$$(\gamma - \alpha - \beta)F + \alpha(1-x)F(\alpha+1) - (\gamma-\beta)F(\beta-1) = 0$$

5.

$$(\gamma - \alpha - 1)F + \alpha F(\alpha+1) - (\gamma-1)F(\gamma-1) = 0$$

6.

$$\gamma(1-x)F - \gamma F(\alpha-1) + (\gamma-\beta)xF(\gamma+1) = 0$$

7.

$$(\gamma - \alpha - \beta)F + \beta(1-x)F(\beta+1) - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1) = 0$$

8.
$$(\gamma-\beta-1)F+\beta F(\beta+1)-(\gamma-1)F(\gamma-1)=0$$

9.
$$\gamma(1-x)F-\gamma F(\beta-1)+(\gamma-\alpha)xF(\gamma+1)=0$$

10.
$$(\alpha-\beta)F-\alpha F(\alpha+1)+\beta F(\beta+1)=0$$

Existen relaciones similares entre la función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ y cualquier par de funciones de la forma ${}_2F_1(\alpha\pm l,\beta\pm m;\gamma\pm n;x)$ donde $l,m,n\in\mathbb{N}$, por ejemplo

11.
$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)-{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;x)=-\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)}\,{}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;x)$$

12.
$${}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma;x)-{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{\alpha x}{\gamma}\,{}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;x)$$

13.
$${}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma+1;x)-{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}\,{}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;x)$$

14.
$${}_2F_1(\alpha-1,\beta+1;\gamma;x)-{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{(\alpha-\beta-1)x}{\gamma}\,{}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma+1;x)$$

Estas últimas cuatro igualdades pueden ser probadas directamente usando la representación como serie de ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ o bien usando repetidamente las igualdades anteriores a ellas.

4. Evaluación del $\lim\limits_{x\to1^-}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ para $\gamma-\alpha-\beta>0$

Supongamos $\gamma-\alpha-\beta>0$ y que $\gamma>\beta>0$

$$\lim_{x\to1^-}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt=$$
$$=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}dt=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

Nota: La justificación de la introducción del límite dentro de la integral es que la integral $\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt$ es uniformemente convergente para $0\le x\le 1$, para demostrarlo notemos que $1-t \leq |1-xt| \leq 1$, para $0 \leq x \leq 1$ y por tanto $|t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}| \leq t^{\beta-1}(1-t)^{\lambda-1}$, donde $\lambda = \begin{cases} \gamma-\alpha-\beta & si \quad \alpha > 0 \\ \gamma-\beta & si \quad \alpha < 0 \end{cases}$ y como $\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\lambda-1}dt = B(\beta,\lambda)$ quedaría demostrada la convergencia uniforme para $0 \leq x \leq 1$.

En realidad la condición de que $\gamma > \beta > 0$ podría debilitarse. Supongamos $\gamma-\alpha-\beta > 0$, $\gamma-\beta > -1$, $\beta > -1$

Haciendo uso de la relación

$$\gamma(\gamma+1)\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \gamma(\gamma-\alpha+1)\ {}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma+2;x) + \alpha[\gamma-(\gamma-\beta)x]\ {}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;x)$$

podemos obtener que

$$\lim_{x\to 1^-}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma+1}\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+2)\Gamma(\gamma-\beta+1)} + \frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)}\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\beta+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

Repitiendo este proceso, puede demostrarse por inducción que

$$\lim_{x\to 1^-}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

siempre que $\gamma-\alpha-\beta > 0$

5. La función hipergeométrica confluente

Además de la función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$, otra función, denominada función hipergeométrica confluente, juega un papel importante en la teoría de funciones especiales:

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!(\gamma)_k}x^k \qquad (|x| < \infty,\ \ \gamma \neq 0,-1,-2,...)$$

Veamos que el radio de convergencia de la serie es infinito

$$\lim_{k\to 0}\left|\frac{\frac{(\alpha)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!}x^k}\right| = \lim_{k\to 0}\left|\frac{\alpha+k}{(\gamma+k)(k+1)}x\right| = 0 \quad (\forall x)$$

No es complicado comprobar que

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \lim_{\beta\to\infty}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{\beta})$$

Propiedades:

1. $$\frac{d}{dx}\;{}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \frac{\alpha}{\gamma}\;{}_1F_1(\alpha+1;\gamma+1;x)$$

2. $$\frac{d^m}{dx^m}\;{}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}\;{}_1F_1(\alpha+m;\gamma+m;x) \qquad (m = 1, 2, 3, ...)$$

3. $$(\gamma-\alpha-1)\;{}_1F_1 + \alpha\;{}_1F_1(\alpha+1) - (\gamma-1)\;{}_1F_1(\gamma-1) = 0$$

4. $$\gamma\;{}_1F_1 - \gamma\;{}_1F_1(\alpha-1) - x\;{}_1F_1(\gamma+1) = 0$$

5. $$(\alpha-1+x)\;{}_1F_1 + (\gamma-\alpha)\;{}_1F_1(\alpha-1) - (\gamma-1)\;{}_1F_1(\gamma-1) = 0$$

6. $$\gamma(\alpha+x)\;{}_1F_1 - \alpha\gamma\;{}_1F_1(\alpha+1) - (\gamma-\alpha)x\;{}_1F_1(\gamma+1) = 0$$

7. $$(\gamma-\alpha)\;{}_1F_1(\alpha-1) + (2\alpha-\gamma+x)\;{}_1F_1 - \alpha\;{}_1F_1(\alpha+1) = 0$$

8. $$\gamma(\gamma-1)\;{}_1F_1(\gamma-1) - \gamma(\gamma-1+x)\;{}_1F_1 + (\gamma-\alpha)x\;{}_1F_1(\gamma+1) = 0$$

9. $${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = {}_1F_1(\alpha+1;\gamma;x) - \frac{x}{\gamma}\;{}_1F_1(\alpha+1;\gamma+1;x)$$

10. $${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma}\;{}_1F_1(\alpha;\gamma+1;x) + \frac{\alpha}{\gamma}\;{}_1F_1(\alpha+1;\gamma+1;x)$$

6. Representación de varias funciones en términos de funciones hipergeométricas

1. La función hipergeométrica ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ se reduce a un polinomio si $\alpha = 0,-1,-2,...$ ó $\beta = 0,-1,-2,...$, por ejemplo:

$$ {}_2F_1(\alpha,0;\gamma;x) = 1 \quad ; \quad {}_2F_1(\alpha,-2;\gamma;x) = 1 - \frac{2\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 $$

2. Haciendo uso de los desarrollos en serie de algunas funciones podemos expresar éstas en términos de ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$, por ejemplo:

$$ ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k(1)_k}{(2)_k k!}x^k \qquad (|x|<1) $$

luego

$$ ln(1-x) = -x\ {}_2F_1(1,1;2;x) $$

3. En cuanto a la función hipergeométrica confluente:

   (a) ${}_1F_1(\alpha;\alpha;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

   (b) ${}_1F_1(1;2;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x}$

   (c) ${}_1F_1(-2;1;x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$

7. Funciones hipergeométricas generalizadas

Consideremos la serie de potencias

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k....(\alpha_p)_k}{(\gamma_1)_k....(\gamma_q)_k} \frac{x^k}{k!} $$

$$ (p,q = 0,1,2,3,...)\ con\ p \le q+1,\ x \in \mathbb{R};\ \alpha_r,\gamma_s \in \mathbb{R};\ (\gamma_s \ne 0,-1-2,....) $$

$$ \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_{k+1}}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_{k+1}} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k} \frac{x^k}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r+k)}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s+k)} \frac{x}{k+1} \right| = \begin{cases} 0 & si \quad p \le q \\ 1 & si \quad p = q+1 \end{cases} $$

La suma de la serie se denomina función hipergeométrica generalizada y se denota por

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{c} \alpha_1, ..., \alpha_p; x \\ \gamma_1, ..., \gamma_s \end{array}\right) $$

o de forma más abreviada

$$ {}_pF_q(\alpha_r; \gamma_s; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k} \frac{x^k}{k!} $$

La función ${}_{q+1}F_q(\alpha_r; \gamma_s; x)$ está definida para $|x| < 1$ y las ${}_pF_q(\alpha_r; \gamma_s; x)$ con $p \leq q$ en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplos:

$$ {}_0F_0(\alpha_r; \gamma_s; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x $$

$$ {}_1F_0(\alpha_r; \gamma_s; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k}{k!} x^k = (1-x)^{-\alpha_1} $$

$$ {}_1F_1(\alpha_r; \gamma_s; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k}{(\gamma_1)_k} \frac{x^k}{k!} = {}_1F_1(\alpha_1; \gamma_1; x) $$

La función ${}_pF_q(\alpha_r; \gamma_s; x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$ \left[\delta \prod_{s=1}^{q} (\delta + \gamma_s - 1) - x \prod_{r=1}^{p} (\delta + \alpha_r)\right] y = 0 $$

donde δ denota al operador diferencial $x\dfrac{d}{dx}$

Nota:

- Si $p = q = 1$

$$ \left[x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} + \gamma_1 - 1\right) - x\left(x\frac{d}{dx} + \alpha_1\right)\right] y = 0 $$

$$ xy'' + (\gamma_1 - x)y' - \alpha_1 y = 0 $$

- Si $p = 2$, $q = 1$

$$ x(1-x)y'' + [\gamma_1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)x]\, y' - \alpha_1\alpha_2 y = 0 $$