TEMA I: FUNCIONES ELEMENTALES

1. Función Logaritmo

Todos conocemos la definición de logaritmo en base b, siendo b un número entero positivo distinto de 1.

$$u = log_b x \iff x = b^u$$

y la propiedad fundamental

$$log_b(xy) = log_b x + log_b y$$

Sin embargo esta definición tiene algunos puntos oscuros.

- qué significa b^u cuando u es un número irracional, por ejemplo $10^{\sqrt{2}}$
- aunque pudiésemos salvar el escollo anterior, podríamos garantizar que $b^u.b^v = b^{u+v}$ con $u, v \in \mathbb{R}$

Podemos salvar estos problemas de una forma elegante y sencilla, introduciendo primero los logaritmos para usarlos luego en la definición de b^u.

1..1 Definición del logaritmo neperiano como integral

Si suponemos el logaritmo neperiano como una función f definida en $\mathbb{R}$, se desea que verifique

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1.1}$$

donde x e y pertenecen al dominio de f.

Para simplificar la busqueda de soluciones de la ecuación (1.1) es útil centrarse sólo en las soluciones que tienen alguna propiedad más, por ejemplo que sean derivables.

Es evidente que una solución es la función nula, además es la única que está definida en todo $\mathbb{R}$. El resto de soluciones no está definida en $x = 0$, en efecto si $x = 0$ pertenece al dominio de f, entonces

$$f(x.0) = f(x) + f(0) \implies f(0) = f(x) + f(0) \implies f(x) = 0$$

para todo x del dominio de la función, es decir, es la función nula.

Toda solución de (1.1) que tenga al 1 en su dominio, se anula en dicho punto.

$$f(1.1) = f(1) + f(1) \implies f(1) = 2f(1) \implies f(1) = 0$$

Si 1 y -1 están en el dominio de f

$$f[(-1).(-1)] = f(-1) + f(-1) \implies f(1) = 0 = 2f(-1) \implies f(-1) = 0$$

Si x, $-x$, 1 y -1 son del dominio de la función

$$f[x.(-1)] = f(x) + f(-1) \implies f(-x) = f(x)$$

con lo que las soluciones de (1.1) son funciones pares.

Supongamos ahora, que f tiene derivada $f'(x)$ en cada $x \neq 0$. Tomando y fijo en (1.1) y derivando respecto de x

$$yf'(xy) = f'(x)$$

para todo x del dominio de f, en particular para $x = 1$

$$yf'(y) = f'(1) \implies f'(y) = \frac{f'(1)}{y} \quad (y \neq 0)$$

Esta última igualdad nos muetra que f' es monótona y continua en cada intervalo cerrado que no contenga al cero, por lo que f' es integrable y podemos escribir

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)dt = f'(1) \int_c^x \frac{1}{t} dt$$

si $x > 0$ tomamos $c > 0$ y $x < 0$ elegimos $c < 0$

Dado que $f(1) = 0$, tomamos $c = 1$

$$f(x) = f'(1) \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x > 0)$$

si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y como $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = f'(1) \int_1^{-x} \frac{1}{t} dt \quad (x < 0)$$

estas dos fórmulas se pueden fundir en una

$$f(x) = f'(1) \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt \quad (x \neq 0)$$

Si $f'(1) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo x distinto de cero, luego impongamos que $f'(1) \neq 0$ y dividamos por este número en los dos lados de la última igualdad

$$g(x) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt \quad (x \neq 0)$$

$g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(1)}$ es también solución de (1.1).

Dado que $g(-x) = g(x)$ (función no inyectiva) definiremos el logaritmo neperiano a través de $g(x)$ pero sólo para $x > 0$, con lo cual existirá la inversa de $g(x)$.

Definición: Si $x \in \mathbb{R}^+$, definimos el logaritmo neperiano de x como la integral

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Proposición: La función logaritmo tiene las siguientes propiedades:

1. $ln(1) = 0$
2. $[ln(x)]' = \dfrac{1}{x}, \quad \forall x > 0$
3. $ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$

Demostración: 1. y 2. son triviales. Probemos 3.

$$ln(x.y) = \int_1^{x.y} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{x.y} \frac{1}{t} dt = ln(x) + ln(y)$$

para lo que se efectua el cambio de variable $u = \dfrac{t}{x}$ en la segunda integral.

No es complicado esbozar la gráfica de la función logaritmo neperiano, teniendo en cuenta las siguientes cuestiones

- $[ln(x)]' > 0$ lo que indica que es una función creciente.
- $ln(1) = 0$, que junto con lo anterior nos garantiza que $ln(x) > 0$ para todo $x > 1$ y $ln(x) < 0$ para $0 < x < 1$.
- $[ln(x)]'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ lo que muestra que es una función cóncava.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln(x)]' = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} [ln(x)]' = +\infty$, que pone de manifiesto la tangencia vertical y horizontal en $x = 0$ y para $x \to +\infty$ respectivamente.

Consecuencias de la propiedad 3.

Una primera consecuencia es que la función logaritmo neperiano no está acotada ni superiormente ni inferiormente.

$ln(xy) = ln(x) + ln(y)$, tomando $x = y$ obtenemos $ln(x^2) = 2ln(x)$. Si tomamos $y = x^2$, se comprueba que $ln(x^3) = 3ln(x)$, y mediante inducción se comprueba que $ln(x^n) = nln(x)$ para todo natural $n \geq 1$. Si particularizamos esta igualdad para $x = 2$, tendremos $ln(2^n) = nln(2)$ por lo que $\forall M > 0$ podemos escribir que $ln(2^n) > M$ si más que tomar $n > \dfrac{M}{ln(2)}$. Demostrándose que la función no está acotada superiormente.

Si tomamos, ahora, $y = \dfrac{1}{x}$, $ln(x.\dfrac{1}{x}) = ln(1) = 0 = ln(x) + ln(\dfrac{1}{x})$, lo que demuestra que $ln(\dfrac{1}{x}) = -ln(x)$. Igualdad que aplicada a $x = 2^n$ nos lleva a $ln(\dfrac{1}{2^n}) = -nln(2)$ permitiendo garantizar que $\forall M > 0$, $ln(\dfrac{1}{2^n}) < -M$ al tomar $n > \dfrac{M}{ln(2)}$ y prueba la no existencia de cotas inferiores.

Otra consecuencia importante es el hecho de que la gráfica de $ln(x)$ corta a cada recta horizontal sólo una vez, es decir, dado $y \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $ln(x) = y$. Para su comprobación basta considerar $y > 0$ cualquiera y elegir $n > \dfrac{y}{ln(2)}$, lo que nos asegura que $ln(2^n) > y$. Aplicando el teorema de los valores intermedios en el intervalo $[1, 2^n]$ concluimos que existe $x \in (1, 2^n)$ tal que $ln(x) = y$. Para los $y < 0$ se actua igual pero en el intervalo $[\dfrac{1}{2^n}, 1]$. La unicidad de x se deduce del hecho de que $ln(x)$ es estrictamente creciente.

Definición: Designamos por e el número tal que $ln(e) = 1$

Nota: $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y su valor es aproximadamente $2'7182818285$.

1..2 Logaritmos referidos a una base positiva $b \neq 1$

En la sección anterior hemos visto que la función f, derivable, más general que satisface la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$ está dada por

$$f(x) = Cln(x); \qquad C \equiv \ constante$$

si $C = 0$, entonces $f(x)$ es la función nula. Si $C \neq 0$ existe un único $b > 0$ tal que $f(b) = 1$ y para éste se verifica que $1 = Cln(b)$ y como $b \neq 1$, se obtiene $C = \dfrac{1}{ln(b)}$ y por tanto $f(x) = \dfrac{ln\ x}{ln\ b}$. A esta función se le denomina logaritmo en base b de x y se denota por $log_b x$.

Definición: Si $b > 0$, $b \neq 1$ y si $x > 0$

$$log_b x = \frac{ln\ x}{ln\ b}$$

Las gráficas de las funciones $log_b x$, con $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, se obtiene a partir de la gráfica de $ln\ x$.

propiedades:

1. $log_b b = 1$
2. $log_b 1 = 0$
3. $log_e x = ln\ x$
4. $log_b(xy) = log_b x + log_b y$
5. $log_b(\frac{x}{y}) = log_b x - log_b y$
6. $log_b(x^n) = n log_b x \quad (n \in \mathbb{Z})$

1..3 Fórmulas de derivación e integración en las que intervienen logaritmos

$$\int \frac{1}{x} dx = ln\ x + C \quad (x > 0)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\ f(x) + C \quad (f(x) > 0,\ \ \forall x)$$

estas fórmulas pueden ser extendidas

$$L_0(x) = ln|x| = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt \quad (x \neq 0)$$

$$L_0(xy) = ln(|xy|) = ln(|x||y|) = ln|x| + ln|y| = L_0(x) + L_0(y)$$

$$L_0'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = L_0[f(x)] + C = ln|f(x)| + C \quad (f(x) \neq 0,\ \ \forall x)$$

Derivación logarítmica

Sea $f(x)$ derivable, si definimos $g(x) = L_0[f(x)] = ln|f(x)|$ para todo x tal que $f(x) \neq 0$. Entonces

$$g'(x) = L_0'[f(x)].f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

si conocemos $g'(x)$ puede calcularse $f'(x)$

Ejemplo: $f(x) = x^2.cos\ x.(1 + x^4)^{-7}$

$$g(x) = ln|f(x)| = ln\ x^2 + ln|cos\ x| + ln(1 + x^4)^{-7} = 2ln\ x + ln|cos\ x| - 7ln(1 + x^4)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} - \frac{sen\ x}{cos\ x} - \frac{28x^3}{1+x^4}$$

por lo tanto

$$f'(x) = \frac{2xcos\ x}{(1+x^4)^7} - \frac{x^2 sen\ x}{(1+x^4)^7} - \frac{28x^5 cos\ x}{(1+x^4)^8}$$

2. La función Exponencial

Dado que $\forall x \in \mathbb{R}$, existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $ln\ y = x$ podemos aplicar el proceso de inversión para definir y como función de x. La función inversa resultante se denomina función exponencial o antilogaritmo.

Definición: $\forall x \in \mathbb{R}$, definimos $E(x)$ como el número y cuyo logaritmo es x, es decir

$$y = E(x) \iff ln\ y = x$$

Observaciones:

- El dominio de la función $E(x)$ es todo $\mathbb{R}$.
- El conjunto imagen de $E(x)$ es $\mathbb{R}^+$
- $ln\ E(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $E[ln(x)] = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.
- La gráfica de la función $E(x)$ es simétrica a la de $ln(x)$ respecto a la recta $y = x$.

Teorema: La función exponencial tiene las propiedades siguientes:

1. $E(0) = 1, \quad E(1) = e$
2. $E'(x) = E(x) \quad \forall x$
3. $E(a+b) = E(b).E(b) \quad \forall a, b$

Demostración: 1. se deduce de la definición y del hecho de que $ln\ 1 = 0$ y $ln\ e = 1$.

Demostraremos 3. que es la ecuación funcional para la exponencial. Sean $x = E(a)$, $y = E(b)$, $c = ln(xy)$; tenemos que, $ln\ x = a$, $ln\ y = b$, $E(c) = xy$. Pero $c = ln(xy) = ln\ x + ln\ y = a + b$, luego $c = a + b$ y por tanto $E(c) = E(a+b)$ y como $E(c) = xy = E(a).E(b)$.

Para demostrar 2. usaremos 3..

$$\frac{E(x+h) - E(x)}{h} = \frac{E(x).E(h) - E(x)}{h} = E(x)\frac{E(h) - 1}{h}$$

por lo que basta probar que $\lim_{h\to 0}\dfrac{E(h)-1}{h}=1$. Sea $k=E(h)-1$ o lo que es lo mismo $k+1=E(h)$, esto nos dice que $ln(k+1)=h$. Cuando h tiende a cero $E(h)$ tiende a 1, luego k tiende a cero cuando h tiende a cero

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h)-1}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{ln(k+1)}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{ln(k+1)}{k}}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{ln(k+1)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{ln(k+1)-ln\ 1}{k}=[ln(x)]'_{x=1}=1$$

2..1 Exponenciales expresadas como potencias de e

La ecuación funcional $E(a+b)=E(a).E(b)$ nos permite, entre otras cosas, expresar $E(r)=e^r \quad \forall r\in\mathbb{Q}$. Tomemos $b=-a$

$$1=E(0)=E(a).E(-a)\implies E(-a)=\frac{1}{E(a)}\quad(\forall a\in\mathbb{R})$$

tomando $b=a$, $b=2a$,...,$b=na$ y aplicando inducción, demostramos que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $E(na)=[E(a)]^n$. En particular cuando $a=1$, obtenemos $E(n)=e^n$ y $E(-n)=\dfrac{1}{E(n)}=e^{-n}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. A partir de estos resultados es fácil deducir los que siguen:

$$e=E(1)=E(n.\frac{1}{n})=[E(\frac{1}{n})]^n\implies E(\frac{1}{n})=e^{\frac{1}{n}}\quad(E(\frac{1}{n})>0)$$

$$E(\frac{n}{m})=[E(\frac{1}{m})]^n=[e^{\frac{1}{m}}]^n=e^{\frac{n}{m}}$$

Definición de e^x para x real cualquiera

Hemos visto que $e^x=E(x)$ para todo $x\in\mathbb{Q}$, ahora definimos e^x para x irracional por

$$e^x=E(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

verificándose que $e^a.e^b=e^{a+b}$.

2..2 Definición de a^x para $a>0$ y $x\in\mathbb{R}$

Estamos en disposición de definir a^x para $a>0$. Aunque es muy tentador el definir a^x como el número y tal que $log_a y=x$, se nos plantea un problema para $a=1$ (el logaritmo de base 1 no está definido). Por lo tanto definiremos a^x como sigue:

$$a^x=e^{xln\ a}$$

con esta definición, no sólo hemos salvado el problema para $a = 1$, si no que hemos facilitado el camino para demostrar las siguientes propiedades

$$i)\ ln\ a^x = xln\ a \qquad ii)\ a^x.a^y = a^{x+y} \qquad iii)\ (a.b)^x = a^x.b^x$$

$$iv)\ y = a^x \ \Leftrightarrow\ x = log_a y \quad (a \neq 1) \qquad v)\ (a^x)^y = (a^y)^x = a^{x.y}$$

3. Funciones hiperbólicas

Frecuentemente en Análisis se presentan ciertas combinaciones de funciones exponenciales a las que se les asignan nombres especiales y que se estudian como ejemplo de nuevas funciones

$$senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad tagh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$csch\ x = \frac{1}{senh\ x}\ (x \neq 0), \quad sech\ x = \frac{1}{cosh\ x}, \quad ctgh\ x = \frac{1}{tagh\ x}\ (x \neq 0)$$

Propiedades

$$cosh^2 x - senh^2 x = 1; \quad senh(-x) = -senh\ x; \quad cosh(-x) = cosh\ x$$

$$tagh(-x) = tagh\ x; \qquad senh(x \pm y) = senh\ x\ cosh\ y \pm cosh\ x\ senh\ y$$

$$cosh(x \pm y) = cosh\ x\ cosh\ y \pm senh\ x\ senh\ y; \qquad cosh\ x + senh\ x = e^x$$

$$cosh\ x - senh\ x = e^{-x} \qquad (cosh\ x + senh\ x)^n = cosh(nx) + senh(nx)\ (n \in \mathbb{Z})$$

En cuanto a la derivación

$$(senh\ x)' = cosh\ x; \qquad (cosh\ x)' = senh\ x; \qquad (tagh\ x)' = sech^2 x$$

$$(ctgh\ x)' = -csch^2 x; \quad (sech\ x)' = -sech\ x\ tagh\ x; \quad (csch\ x)' = -csch\ x\ ctgh\ x$$