Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Polinomios Ortogonales

1. Demostrar las siguientes propiedades de los polinomios de Legendre:

$$P_n(1) = 1; \quad P_n(-1) = (-1)^n; \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}; \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

2. Comprobar que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

3. Demostrar que para todo $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ se verifica

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x) dx = 0$$

   lo que demuestra que los polinomios de Legendre son ortogonales.

4. Comprobar que

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

   y usar el resultado para demostrar que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

5. Demuéstrese que:

$$\int_{x}^{1} P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]$$

   Dedúzcase de ello el valor de la integral

$$\int_{0}^{1} x P_n(x) dx$$

6. Calcular el desarrollo en serie de polinomios de Legendre de la funciones $f(x) = |x|$; y $f(x) = (1-x)^{\frac{-1}{2}}$.

7. Demostrar que:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \qquad H_{2n+1}(0) = 0$$

8. Comprobar que

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

9. Desarrollar en serie de polinomios de Hermite la siguiente función:

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

10. Pruébese que si $m \in \mathbb{N}$:

    (a) $L_n^m(x) = (-1)^m \dfrac{n!}{(n+m)!} \dfrac{d^m}{dx^m}[L_{n+m}(x)]$

    (b) $\dfrac{d^m}{dx^m}[e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)] = e^{-x}x^{\alpha-m}L_{n+m}^{\alpha-m}(x)$