Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Gamma y Beta

1. Calcular **a)** $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(2'5)}{\Gamma(5'5)}$ **b)** $\Gamma(\dfrac{-1}{2})$ **c)** $\Gamma(\dfrac{-5}{2})$

2. Calcular las siguientes integrales:

$$\textbf{a)}\ \int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx \quad \textbf{b)}\ \int_0^\infty \sqrt{y}e^{-y^3}dy \quad \textbf{c)}\ \int_0^\infty 3^{-4z^2}dz \quad \textbf{d)}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-ln\ x}}$$

3. Demostrar que $\Gamma(\dfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, y usar este resultado para comprobar que

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

4. Deducir el valor de $\Gamma(\dfrac{1}{2})$a partir del valor de $B(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.

5. Calcular las siguientes integrales:

$$\textbf{a)}\ \int_0^1 x^4(1-x)^3dx \qquad \textbf{b)}\ \int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} \qquad \textbf{c)}\ \int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$$

$$\textbf{d)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^6\theta\ d\theta \qquad \textbf{e)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^4\theta\ cos^5\theta\ d\theta \qquad \textbf{f)}\ \int_0^{\pi} cos^4\theta\ d\theta$$

6. Calcular las siguientes integrales:

$$\textbf{a)}\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} \quad \textbf{b)}\ \int_0^1 x^3 ln\ x\ dx \quad \textbf{c)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x\ dx \quad \textbf{d)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{tg\ x}}$$

7. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m > -1$, se verifica

$$\int_0^1 x^m(ln\ x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

8. Dada $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{sen(p\pi)}$, demostrar que $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{sen(p\pi)}$, siendo $0 < p < 1$.

9. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$

10. Demostrar la fórmula de duplicación $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\dfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$. (Indicación: comparar las dos integrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2x}\theta d\theta$ y $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2x}2\theta d\theta$

11. Dada la función $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, conocida como la derivada logarítmica de $\Gamma(x)$, comprobar las siguientes igualdades:

- $\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x)$
- $\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi\ cot(\pi x)$
- $\Psi(x) + \Psi(x+\frac{1}{2}) + 2ln\ 2 = 2\Psi(2x)$

12. Sabiendo que $\Psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma$ ($\gamma = 0'57721566.....$ es la constante de Euler), Deducir que

$$\Psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

13. Hallar $\Psi(\dfrac{1}{2})$.

14. Demostar la siguiente igualdad

$$\Psi(n + \frac{1}{2}) = -\gamma - 2ln\ 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$