Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Elementales

1. **a)** Hallar todos los valores de c tales que $ln(x) = c + \int_e^x \frac{1}{t}dt$ para todo $x > 0$.

   b) Sea $f(x) = ln[\frac{1+x}{1-x}]$ si $x > 0$. si a y b son números dados, siendo $ab \neq -1$, hallar todos los x tales que $f(x) = f(a) + f(b)$.

2. En cada caso, hallar un x que satisfaga la igualdad dada

   a) $ln(1+x) = ln(1-x)$, **b)** $ln(1+x) = 1 + ln(1-x)$, **c)** $ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 1$.

3. Sea $\frac{ln(x)}{x}$ si $x > 0$. Describir los intervalos en los que f es creciente, decreciente, convexa y cóncava. Esbozar la gráfica de f.

4. Deducir la fórmula recurrente

$$\int x^m ln^n(x)dx = \frac{x^{m+1}ln^n(x)}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m ln^{n-1}(x)dx$$

   y utilizarla para integrar $\int x^3 ln^3(x)dx$.

5. **a)** Si $x > 0$, sea $f(x) = x - 1 - ln(x)$, $g(x) = ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$. Examinar los signos de f' y g' para demostrar que las desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} < ln(x) < x - 1$$

   son válidas para $x > 0$, $x \neq 1$. Cuando $x = 1$, se convierten en igualdades.

   b) Trazar las gráficas de las funciones $A(x) = x - 1$ y $B(x) = 1 - \frac{1}{x}$ para $x > 0$, e interpretar geométricamente las desigualdades del apartado a).

6. Demostar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

   con los métodos siguientes: **a)** utilizando la definición de $[ln(x)]'_{x=1}$; **b)** usando el resultado del ejercicio anterior.

7. Si $a > 0$, demostrar que $ln(a^r) = rln(a)$ para todo número racional r.

8. Hallar, usando la derivada logarítmica, la derivada de $f(x)$ en los siguientes casos, en los cuales se supone la función definida para los x en que tengan sentido las correspondientes expresiones.
a) $f(x) = x^x$; **b)** $f(x) = (sen\ x)^{cos\ x} + (cos\ x)^{sen\ x}$; **c)** $f(x) = \dfrac{x^2(3-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)(3+x)^{\frac{2}{3}}}$

9. Dada la función $f(x) = x^r \ \ (x > 0)$, usar la exponencial para demostrar la validez de la fórmula $f'(x) = rx^{r-1}$, para cualquier número real r.

10. Dada la definición $a^x = e^{xln\ a}$, demostrar que:
a) $ln\ a^x = xln\ a$; **b)** $(ab)^x = a^x b^x$; **c)** $a^x a^y = a^{x+y}$; **d)** $(a^x)^y = a^{xy}$;
e) si $a \neq 1$, entonces $y = a^x \iff x = log_a y$

11. Sea f una función definida en todo el eje real, con derivada f' que satisface la ecuación
$$f'(x) = cf(x) \quad para\ todo\ x$$
donde c es una constante. Probar que existe una constante K tal que $f(x) = Ke^{cx}$ para cada x. (Indicación: Tómese $g(x) = f(x)e^{-cx}$ y estduiar $g'(x)$).

12. Sea f una función definida en todo el eje real. Supóngase también que f satisface la ecuación funcional
$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad para\ todo\ x\ e\ y \tag{0.1}$$
a) Aplicando sólo la ecuación funcional demostrar que f(0) es 0 ó 1. Demostrar además que si $f(0) \neq 0$ entonces $f(x) \neq 0$ para todo x. Supóngase , que además de (0.1), f posee derivada f'(x) para todo x, y demuéstrese las siguientes propiedades:
b) $f'(x)f(y) = f(x)f'(y)$ para todo x e y.
c) Existe una constante c tal que $f'(x) = cf(x)$ para todo x.
d) $f(x) = e^{cx}$ si $f(0) \neq 0$.

13. Deducir las siguientes propiedades de las funciones hiperbólicas:

- $cosh^2 x - senh^2 x = 1$
- $senh(-x) = -senh\ x$
- $cosh(-x) = cosh\ x$
- $tgh(-x) = -tgh\ x$
- $cosh\ x + senh\ x = e^x$
- $cosh\ x - senh\ x = e^x$
- $(senh\ x)' = cosh\ x$
- $(cosh\ x)' = senh\ x$
- $(tgh\ x)' = sech^2 x = 1 - tgh^2 x$
- $senh(x \pm y) = senh\ x cosh\ y \pm cosh\ x senh\ y$
- $cosh(x \pm y) = cosh\ x cosh\ y \pm senh\ x senh\ y$
- $(cosh\ x + senh\ x)^n = cosh(nx) + senh(nx) \ \ (n\ entero)$